1.2 Leyes de Escala

Leyes de escalas

Una hormiga es increíblemente fuerte respecto a su tamaño; puede cargar en su espalda el peso de varias hormigas.
Sin embargo un elefante tendría muchas dificultades si intentara cargar a otro elefante.
Si hiciéramos una hormiga del tamaño de un elefante, ¿sería una super-hormiga?

Veremos que no es posible la existencia de una hormiga de tal tamaño…
Esto ya fue analizado por Galileo en 1638 en su libro "Dos nuevas ciencias" en el que mostró que, cuando una forma crece en tamaño, su volumen crece más rápido que su superficie.

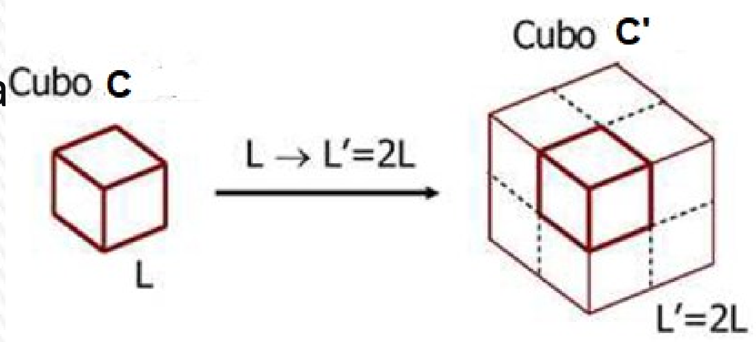
"Cuando un objeto crece sin cambiar de forma, de modo que una longitud característica del mismo (por ejemplo, su altura) se multiplica por un factor, su superficie se multiplica por el cuadrado de ese factor, en tanto que su volumen se multiplica por el cubo de su factor."

Es la denominada ley cuadrática-cúbica…

Leyes de escalas

Comencemos viendo cómo varían con el tamaño de un objeto las magnitudes básicas de longitud, área y volumen.

La figura muestra dos cubos, el C en el que la arista vale L y el C' en el que la arista vale L'= 2L.
El segundo cubo, es mayor que el primer cubo, con un factor de escala *k*, con *k* = 2.

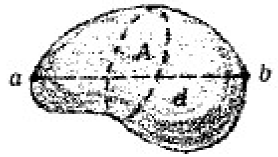


El **factor de escala (*k*)** es la razón de longitudes correspondientes en dos figuras semejantes (también se le llama **razón de semejanza**).

Si en lugar de longitudes comparamos **áreas**, una cara del cubo C' tiene 4 veces el área de una cara de C: la razón entre estas áreas es $k^2 = 2^2 = 4$.
Respecto al **volumen**, el volumen de C' es 8 veces el volumen de C, la razón de estos volúmenes es: $k^3 = 2^3 = 8$.
Este resultado, obvio para un cubo, es también cierto para cualquier par de figuras o cuerpos semejantes, prescindiendo de la forma.

Dos cuerpos son semejantes cuando la razón entre las dimensiones lineales que lo caracterizan es la misma, cualesquiera que sean éstas

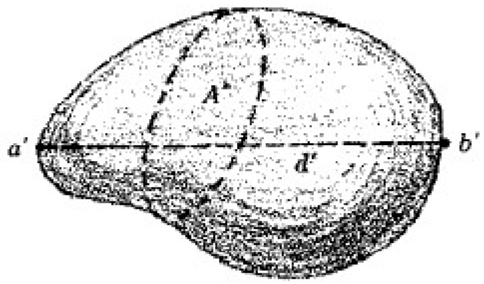
Leyes de escalas



Consideremos las dos figuras semejantes de distinto tamaño que se muestran en la figura.

El factor de escala es el cociente de longitudes correspondientes de las figuras

$$k = \frac{d'}{d}$$



Como las figuras son semejantes, el factor de escala *k* es el mismo para dos longitudes cualesquiera.

La razón entre las áreas transversales *A* y *A'* vale: $\frac{A'}{A} = k^2$

La razón entre los volúmenes *V* y *V'* vale: $\frac{V'}{V} = k^3$

La importancia de estas relaciones se debe a que ciertas propiedades físicas dependen del volumen y otras dependen del área.

La razón de esas propiedades dependerá del tamaño del cuerpo.

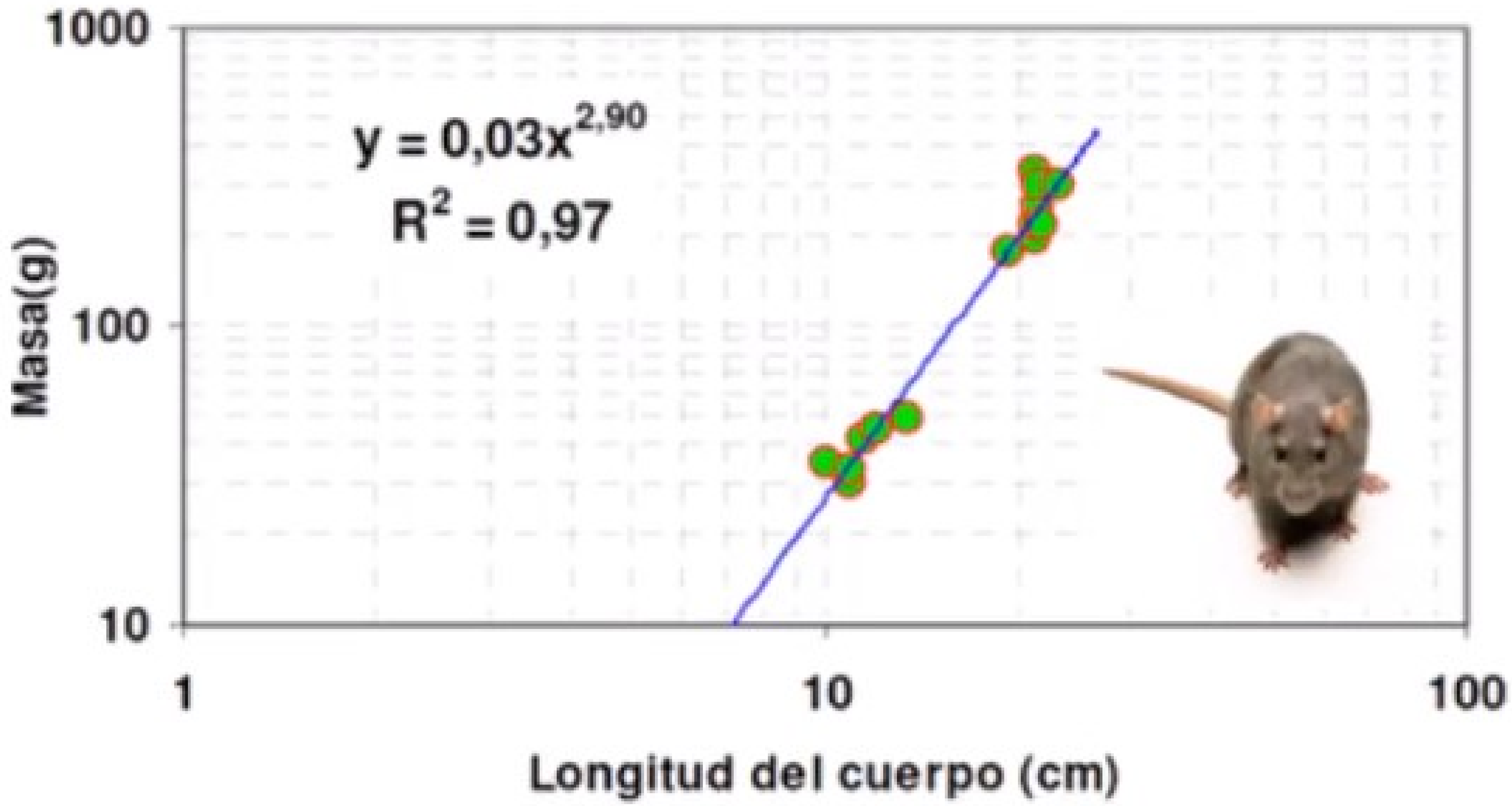
Ejemplo: el peso de un animal depende de su volumen. Si W y W' son los pesos de dos animales de la misma forma, se puede escribir: *W= aV* y *W'= aV'*

donde *a* es una constante de proporcionalidad igual para c/u.

Entonces se cumple:

$$\frac{W'}{W} = \frac{aV'}{aV} = \frac{V'}{V} = k^3$$

Hay ratones que guardan una relación casi cúbica entre la masa y la longitud del cuerpo.



Leyes de escalas

La relación entre volúmenes es siempre igual al cubo, y la relación entre superficies igual al cuadrado de la relación entre longitudes.

Si aumentamos el tamaño (dimensiones lineales) de un cuerpo en un cierto factor, conservando su forma, su superficie (es decir el área) aumentará como el cuadrado de ese factor y su volumen como el cubo. Este fenómeno se suele expresar con la notación: $S \propto l^2 \qquad V \propto l^3$

A partir de estas relaciones podemos escribir la siguiente relación entre dos cuerpos 1 y 2:

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 = \left(\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Si tomamos S_1 *y* V_1 *como valores iniciales para un cuerpo cualquiera, resulta* que cuando extrapolamos a tamaños distintos, la relación entre la nueva superficie *S y el nuevo volumen V es:*

$$S = KV^{\frac{2}{3}}$$

Ley cuadrática-cúbica

K es una constante que depende de los valores iniciales, es decir, de la forma del cuerpo. Para esferas de diferente tamaño, la superficie es $4\pi R^2$ *y el volumen* $4\pi R^3/3$*, donde R es el radio. Entonces la relación entre superficie y* volumen es:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}(4\pi)^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}} \cong 4{,}84 \times V^{\frac{2}{3}} = 4{,}84 \times V^{0{,}667}$$

La esfera es, precisamente, el cuerpo con menor superficie para un volumen dado. Para un cuerpo con cualquier otra forma, el coeficiente *K* será siempre más grande que 4,84.

Leyes de escalas

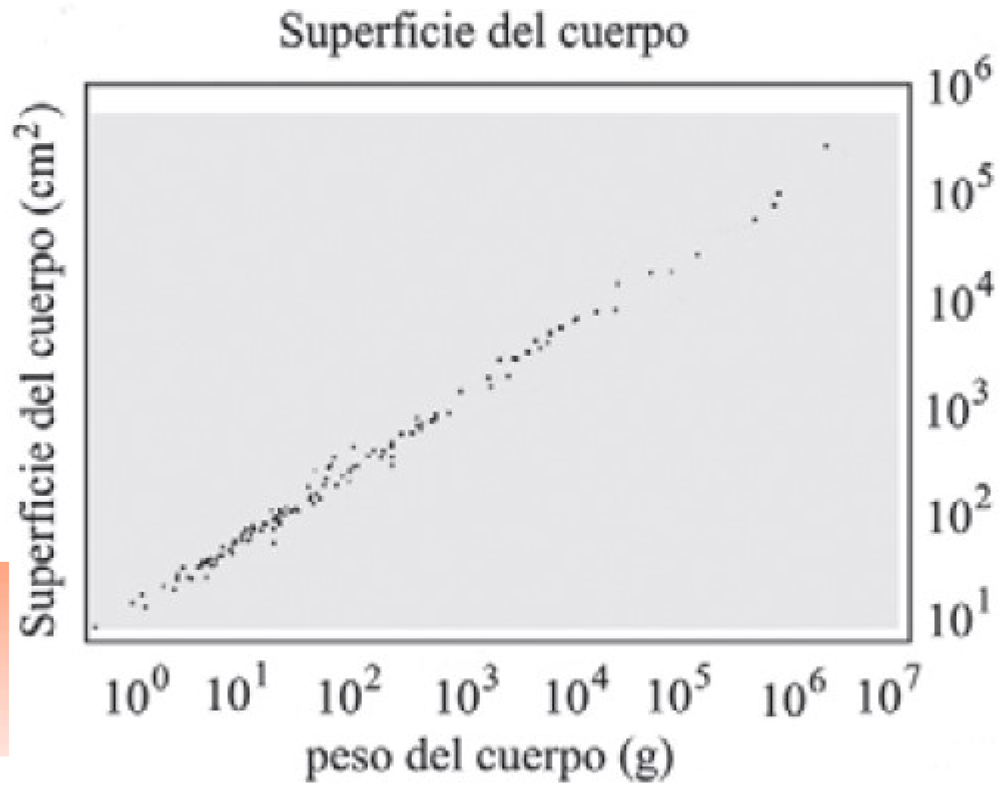
Este tipo de relaciones se les llama **leyes de escala isométricas.**

Es útil visualizar las relaciones del tipo $y = kx^a$ *en gráficos en los que se representen* en abscisas y ordenadas los logaritmos (decimales o neperianos) de los parámetros en lugar de los parámetros mismos, por lo que se puede expresar, usando las propiedades de los logaritmos: $\log(y) = \log(k) + a.\log(x)$

Para el caso que estamos considerando, tendríamos: $\log S = \log K + \frac{2}{3}\log V$

que implica que obtenemos una recta de pendiente igual a 2/3.

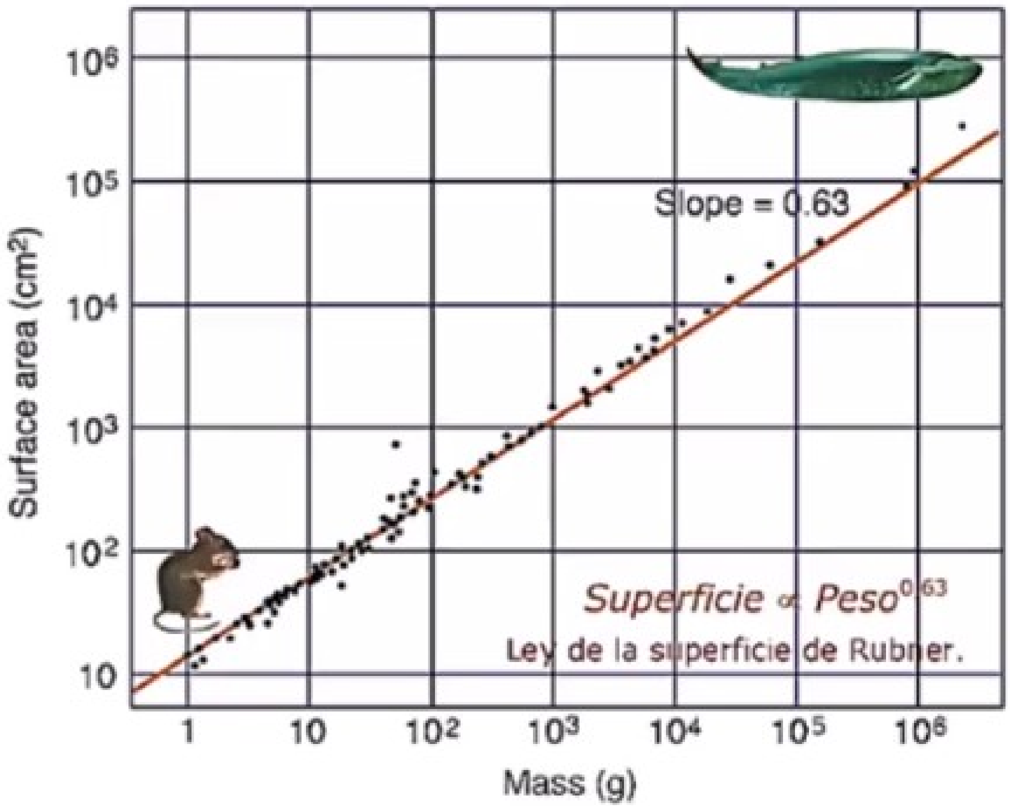
Si consideramos cuerpos de seres vivos, con una densidad constante en todos ellos,aproximadamente la del agua, entonces la recta que relaciona superficie corporal y masa tiene la misma pendiente.



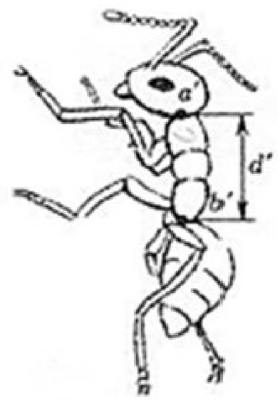
Superficie corporal en función de la masa para vertebrados. Hemmingsen (1960)

Leyes de escalas

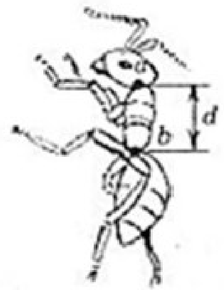
Relación entre
el área
superficial
y la masa de
mamíferos



Leyes de escalas-Fuerza relativa



HORMIGA GIGANTE



HORMIGA NORMAL

Las relaciones de escala, o leyes de escala, son las expresiones de los **cambios funcionales y estructurales que tienen lugar como consecuencia de los cambios de tamaño (cambios de escala) en los organismos.**

La figura muestra dos hormigas semejantes (de forma y composición idénticas). La hormiga gigante tiene un factor de escala $k = d'/d$ con respecto a la hormiga normal.
Por tanto la hormiga gigante pesa k^3 veces lo que la hormiga normal.

Se ha comprobado que la fuerza de cualquier organismo depende solamente del área de la sección transversal de sus músculos.

Por ejemplo el levantador de pesas: la longitud de sus brazos es normal, lo que es extraordinariamente grande es la sección transversal de sus brazos.

Se llama **fuerza relativa de un animal** al peso que puede levantar (o soportar) por la acción de sus músculos dividido por su propio peso.
El peso máximo que se puede sostener contra la gravedad terrestre depende de la fuerza muscular y ésta de la sección total de los músculos que intervienen en dicha acción, mientras que el propio peso del animal es proporcional a su volumen.

Sea $F_{máx}$ el peso máximo que puede levantar o la fuerza máxima que puede realizar la hormiga y W su propio peso, entonces la fuerza relativa f vale:

$$f = \frac{F_{máx}}{W}$$

Leyes de escalas-Fuerza relativa

Sean W' y $F'_{máx}$ el peso y la fuerza máxima que puede realizar la hormiga gigante. En virtud de las correspondientes proporcionalidades con el volumen y con la superficie se cumplen las siguientes relaciones: $W' = k^3W$ y $F'_{máx} = k^2F_{máx}$

Por lo tanto:

$$f' = \frac{F'_{máx}}{W'} = \frac{k^2 F_{máx}}{k^3 W} = \frac{F_{máx}}{kW} = \frac{1}{k} f$$

$$\boxed{f' = \frac{1}{k} f}$$

Por tanto la fuerza relativa de la hormiga gigante es menor que la de la hormiga normal y se reduce en un factor *1/k*.

Comúnmente se dice que una hormiga es enormemente fuerte, pues puede levantar de 10 a 50 veces su peso.

Es decir la fuerza relativa de la hormiga varía entre 10 y 50, mientras que la de un hombre tendría una fuerza relativa 0,50 (suponiendo que puede levantar la mitad de su peso).

Comparar las fuerzas relativas es erróneo, la fuerza relativa de la hormiga es tan grande, justamente por su pequeño tamaño. Para evaluar la fuerza real de la hormiga se tiene que tener en cuenta la diferencia de tamaños.

Una hormiga normal tiene una longitud de 1,2 cm, mientras que un hombre tiene una longitud de 1,8 m. Una hormiga gigante, del tamaño de un hombre tendría un factor de escala de:

$$k = \frac{180\ cm}{1{,}2\ cm} = 150$$

Leyes de escalas-Fuerza relativa

Por tanto la fuerza relativa de una hormiga gigante (suponiendo f = 30) de:

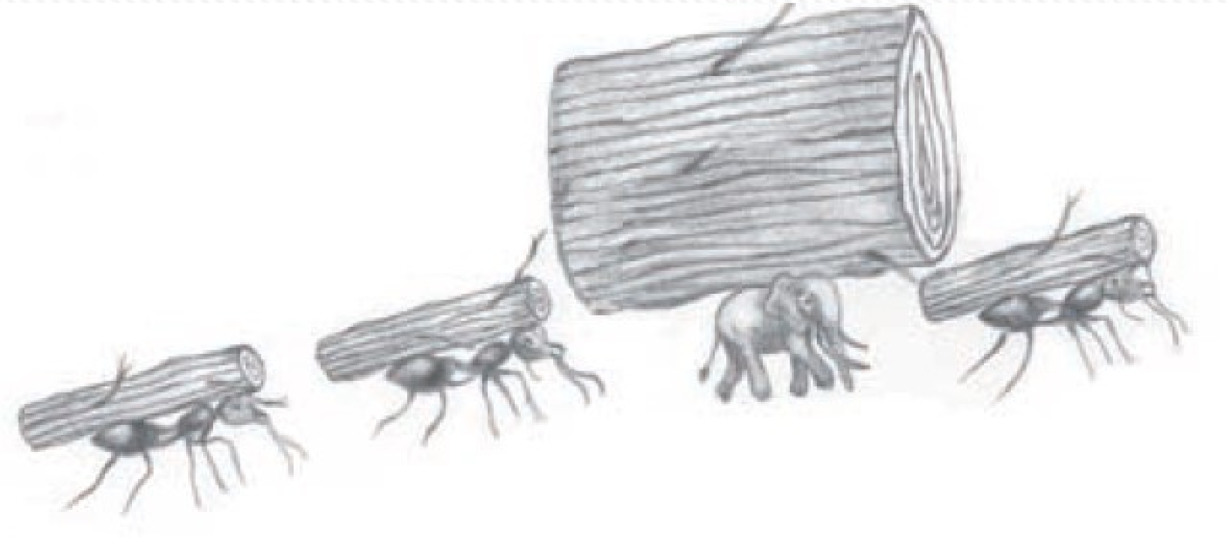
$$f' = \frac{1}{k} f = \frac{1}{150} \times 30 = \frac{1}{5} = 0{,}20$$

Menor que la del hombre!!!

O dicho de otra forma, un hombre del tamaño de una hormiga normal tendría una fuerza relativa de:

$$f' = \frac{1}{k} f = \frac{1}{\frac{1}{150}} \times 0{,}50 = 150 \times 0{,}50 = 75$$

Por lo tanto, una hormiga es intrínsacamente más débil que un hombre o un elefante. De hecho, una hormiga gigante del tamaño humano no sería una criatura biológicamente viable: ya que sólo podría levantar un porcentaje pequeño de su peso, incluso no podría levantar ni siquiera sus patas!



Fuerza relativa de dos animales con el mismo tamaño (el de una hormiga) pero con formas distintas (de elefante y de hormiga).

Leyes de escalas -Fuerza relativa

Lo dicho acerca de la fuerza de los músculos se aplica también a los huesos y cualquier otro material estructural.
Para un animal de forma dada, la resistencia de sus huesos con respecto a su propio peso depende de su tamaño, y cuanto mayor sea el animal, más pequeña es su fuerza relativa. La forma de los animales grandes es muy diferente a la de animales pequeños.

Mosca, perro y elefante represen-tados como si tuvie-ran el mismo tamaño. Notar la diferencia en el grosor relativo de las extremidades.

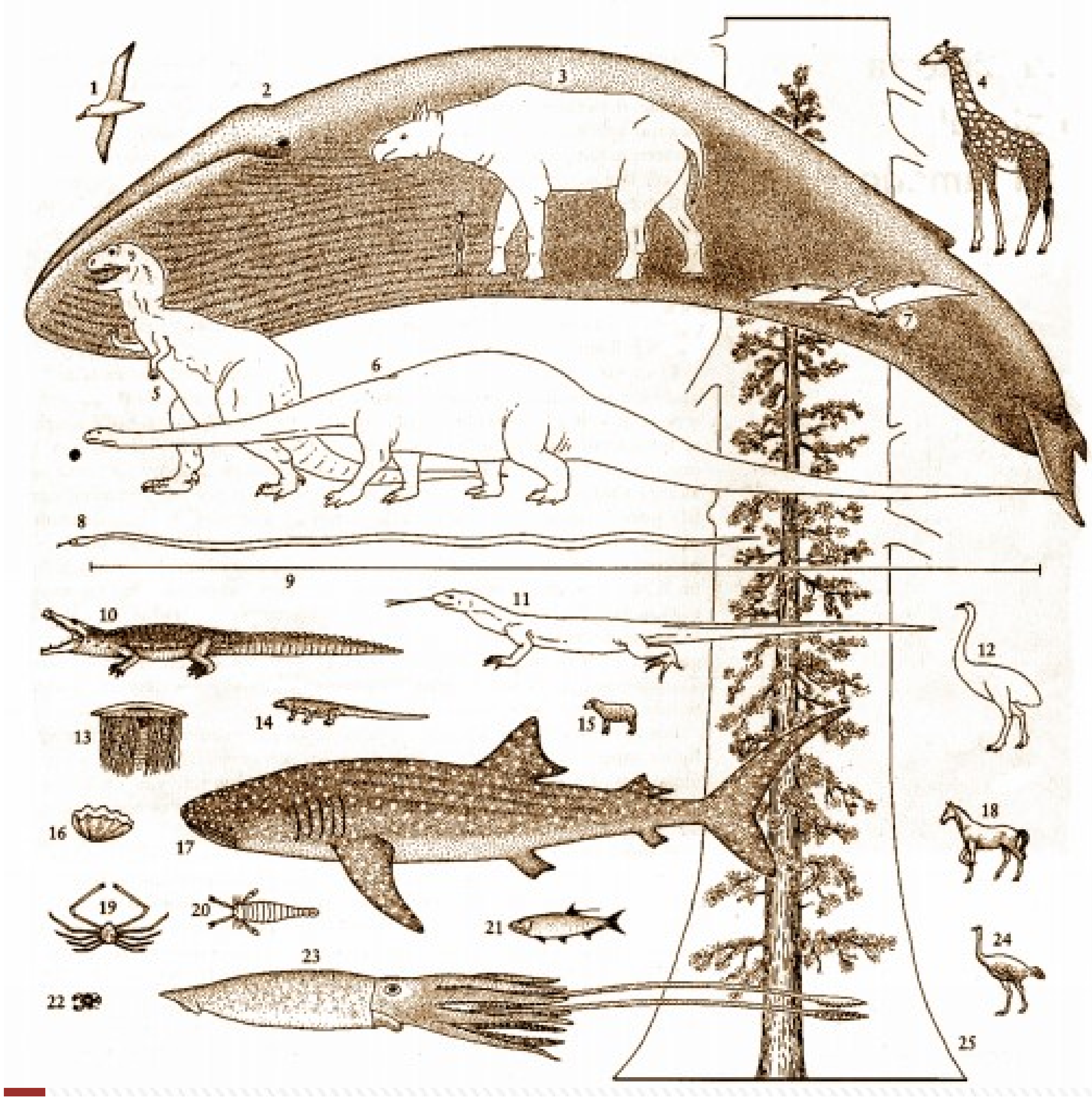
El ancho de las patas del elefante es mucho mayor que las del perro, y éste que el de la mosca.
Un animal del tamaño de un elefante no puede tener la forma de un perro porque el cociente resistencia de los huesos y el peso del cuerpo sería muy pequeño.
Los huesos y músculos de los animaless grandes deben ser desproporcionadamente más anchos que huesos y músculos de animales pequeños.

Leyes de escalas -Fuerza relativa

El efecto de escala interviene en otras propiedades fisiológicas.
La velocidad a la que se puede extraer el oxígeno del aire, la velocidad a la que los alimentos se digieren y absorben en el intestino, la velocidad a la que se pierde calor en la superficie del cuerpo, son proporcionales a las áreas de los pulmones, intestinos y la piel respectivamente.
La velocidad a la que se debe suministrar oxígeno o alimento o la velocidad a la que se produce calor es proporcional a la masa (es decir, el volumen) del animal.
Todo esto repercute en la rapidez en una carrera, la altura en un salto, la potencia que puede desarrollar.

Estas consideraciones muestran que para cada tipo de animal hay un tamaño óptimo. No obstante, aunque Galileo demostró lo contrario hace más de trescientos años, todavía creemos que si una hormiga fuera tan grande como un hombre tendría una fuerza enorme o que podrían existir animales de tamaños descomunales como Godzilla o King Kong.
De hecho, el mayor animal que ha existido es la ballena azul (con un peso de hasta 170 toneladas) y su tamaño es posible porque es un animal acuático.
El mayor dinosaurio que existió fue un saurópodo el Argentinosaurio con un peso estimado entre 65 y 90 toneladas.
La figura siguiente muestra distintos animales representados a la misma escala.

Organismos de mayor tamaño (todos a la misma escala)

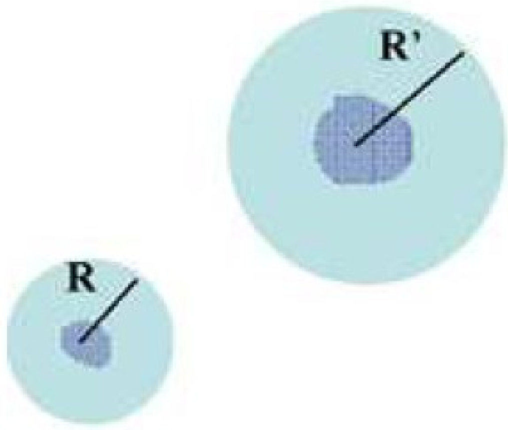


1. La mayor ave voladora (albatros);
2. El mayor animal conocido (ballena azul);
3. El mayor mamífero terrestre extinto (Baluchitnerium), junto a una figura humana como punto de comparación;
4. El animal terrestre vivo más alto (jirafa)
5 . Tyrannosaurus;
6. Diplodocus;
7. Uno de los mayores reptiles voladores (Pteranodon);
8. La mayor serpiente extinta;
9. Longitud de la mayor tenia encontrada en el hombre;
10. El reptil vivo más largo (cocodrilo de África occidental);
11. El mayor lagarto extinto;
12. La mayor ave extinta (Aepyomis);
13. La mayor medusa (Cyanea);
14. El mayor lagarto vivo (dragón Komodo);
15. Oveja;
16. El mayor molusco bivalvo (Tridacna);
17. El mayor pez (tiburón ballena);
18. Caballo; 19. El mayor crustáceo (cangrejo araña del Japón);
20. El mayor escorpión marino (Euriptérido);
21. Sábalo real;
22. La mayor langosta;
23. El mayor molusco (calamar gigante, Architeuthis);
24. Avestruz;
25. Los primeros 32 m del mayor organismo conocido (secoya gigante), superpuestos a un alerce de 30 m

Leyes de escalas –División celular

¿Por qué se dividen las células cuando alcanzan cierto tamaño?
Vamos a modelar a las células como esféricas.
El factor de escala de la célula más vieja (y más grande de radio R') con respecto a la célula más joven (y menor de radio R) vale: $k = R'/R$

El volumen de la célula más vieja (V') es k^3 veces el volumen de célula más joven (V), lo que significa que tiene k^3 veces el material metabólico que la más joven, y por tanto requiere k^3 veces más oxígeno y otras sustancias vitales, que la más joven.
Todo el oxígeno consumido por la célula debe pasar a través de la pared de la misma, por lo que la cantidad de oxígeno por unidad de tiempo requerida será proporcional al área de la pared celular.



Por lo tanto la célula más vieja puede obtener a lo sumo k^2 veces el oxígeno que obtiene la más joven por unidad de tiempo.
El cociente entre la cantidad máxima de oxígeno que se puede obtener y el oxígeno necesario se llama **factor de viabilidad (f_V)**. Para que la célula sobreviva $f_V > 1$.
De las relaciones anteriores se deduce que:

$$f_{V\,célula\,vieja} = \frac{1}{k} f_{V\,célula\,joven}$$

Leyes de escalas – División celular

$$f_{V\ célula\ vieja} = \frac{1}{k} f_{V\ célula\ joven}$$

Una célula joven tiene un f_V mayor que 1. Cuando la célula crece, su f_V disminuye y se acerca a 1, para evitar la asfixia, la célula debe detener su crecimiento o dividirse. Por medio de la división, la célula grande con un f_V pequeño es reemplazada por dos células más pequeñas, c/u con un f_V mayor.