

Física, mediciones y estimaciones

02.- Cifras significativas, notación científica y estimaciones



Errores de medición

Toda **medición** siempre implica un **error o incertidumbre** (Δx), que indica la **máxima diferencia probable** entre el **valor medido** (\bar{x}) y el real (x).

Se expresa como:

$$\bar{x} \pm \Delta x$$

Nunca podemos conocer el valor real (x), sólo podemos determinar el valor más probable (\bar{x}).

Δx depende de la **técnica de medición empleada y de las fuentes de errores.**

Fuentes de errores:

de **apreciación** del instrumento (menor variación de la magnitud que se puede registrar);

de **exactitud** que cuantifica qué tanto “creemos” que se acerca al valor real (asociado a la calibración de los instrumentos).

de **interacción** y de **definición**.

Aleatorios (no determinísticos)



Cifras significativas

En general no se da explícitamente la incertidumbre de un número, sino que se indica con las cifras significativas en el valor medido.

La medida 2,91 mm, tiene 3 cifras significativas, esto se interpreta como que los dos primeros dígitos son seguros, pero el tercero es incierto.

Es decir la incertidumbre sería de 0,01 mm.

Dos valores con igual número de cifras significativas pueden tener diferente incertidumbre; una distancia expresada como 137 km tiene tres cifras significativas, pero la incertidumbre es aproximadamente de 1 km.

Cuando usamos números con incertidumbre para calcular otros números, obviamente el resultado también es incierto.

Siempre hay que redondear la respuesta final conservando solamente el número correcto de cifras significativas o, si hay duda, una más cuando mucho.

Cifras significativas

Regla 1: Se cuentan de izquierda a derecha, a partir del primer dígito diferente de cero y hasta el último dígito (dudoso).

- a) 214 b) 81,60 c) 7,03 d) 0,03
e) 0,00860 f) 3236 g) 8700

Regla 2: Al sumar o restar dos números decimales, el número de cifras decimales del resultado es igual al de la cantidad con el menor número de ellas.

$$27,153 + 138,2 - 11,74 = 153,6 \quad \text{y no } 153,613$$

Regla 3: Al multiplicar o dividir dos números, el número de cifras significativas del resultado es igual al del factor con menos cifras.

El área de un rectángulo de 4,5 cm por 3,25 cm, está reportada correctamente por

- a) 14,625 cm²; b) 14,63 cm²; c) 14,6 cm²; d) 15 cm² e) 14 cm²

Cifras significativas

- Siempre redondee su respuesta final conservando sólo el número correcto de cifras significativas.

$$2,72 \times 4,3 = 11,696$$

- Redondee, no trunque.

12 y no 11 (debe tener 2 cifras significativas)

- Para los cálculos intermedios use más cifras significativas que las necesarias.

- La **notación científica** no permite ambigüedades en las cifras significativas

¿9500 tiene 4, 3 ó 2 cifras significativas?

$$9,5 \times 10^3$$

$$9,50 \times 10^3$$

$$9,500 \times 10^3$$

Ejemplos de cifras significativas

1) ¿Cuántas cifras significativas tiene el número 0,003270?

- a) 5 b) 7 **c) 4** d) 6 e) 3

2) $12,23 + 121,418 + 300,1 + 0,12 = 433,868$

¿Cuál es el resultado correcto de la operación si tenemos en cuenta las reglas de las cifras significativas?

- a) 433,86 b) 433,87 c) 433,868 d) 434 **e) 433,9** f) 433,8

3) $7,23 \times 0,7700 \times 28 = 155,8788$

¿Cuál es el resultado correcto de la operación teniendo en cuenta las cifras significativas?

- a) $1,5 \times 10^2$ b) 155,8788 c) $1,55 \times 10^2$ **d) $1,6 \times 10^2$**
e) 155,9 f) $1,56 \times 10^2$ g) 155,8



Estimaciones: cálculos aproximados y de orden de magnitud

Obtener una respuesta exacta de un cálculo es con frecuencia difícil o imposible.

Las estimaciones producen cálculos aproximados eficaces, que permiten establecer si es necesario un cálculo más preciso, además, sirve como verificación parcial en caso de si se realizan cálculos exactos.

Una estimación hasta burda puede darnos información útil.

A veces sabemos cómo calcular cierta cantidad, pero tenemos que estimar los datos necesarios para el cálculo; o bien, el cálculo puede ser demasiado complicado para efectuarse con exactitud, por lo que lo aproximamos.

En ambos casos, nuestro resultado es una estimación, que aún sería útil si tiene un factor de incertidumbre de 2, 10 o más.

Estos cálculos se denominan **estimaciones de orden de magnitud**.

El físico nuclear **Enrico Fermi** (1901-1954) los llamaba “cálculos aproximados”.



Estimaciones: cálculos aproximados y de orden de magnitud

En estos cálculos se suele redondear un número hasta la potencia de 10 más próxima, es lo que se llama **orden de magnitud**.

Ejemplo: altura de hormiga p.ej. 0,8 mm ó, aprox. 10^{-3} m (orden de magnitud 10^{-3} m).

Altura de personas entre 1,5 a 2,0 m, el orden de magnitud de $h \sim 10^0$ m,
El símbolo \sim significa “es del orden de magnitud de”.

Esto no quiere decir que la altura típica de una persona sea realmente de 1 m, sino que está más próxima a 1 m que a 10 m ó $10^{-1} = 0,1$ m.

Podemos decir que una persona típica es tres órdenes de magnitud más grande que una hormiga típica (cociente entre las alturas es, aproximadamente, igual a 10^3).

Un orden de magnitud no proporciona cifras que se conozcan con precisión; es decir, debemos considerar que no tiene cifras significativas.

En muchos casos, el orden de magnitud de una cantidad puede estimarse mediante hipótesis razonables y cálculos simples.

Ejemplo: Ejercicio 1.8

Estime cuántos átomos hay en su cuerpo. (Sugerencia: Con base en sus conocimientos de biología y química, ¿cuáles son los tipos de átomos más comunes en su cuerpo? ¿Qué masa tiene cada tipo? Encuentre la masa atómica de los os elementos para el cálculo

Composición de elementos en % de masa del cuerpo humano y masa atómica de cada elemento en u (unidad de masa atómica), $1 \text{ u} = 1,61 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Elemento:	O	C	H	N	Ca	P	K	S	Na	Cl	Mg
masa atómica en u	15.999	12.011	1.00784	14.0057	40.078	30.9738	39.098	32.065	22.9898	35.453	24.305
% en masa	65	18.5	9.5	3.2	1.5	1	0.4	0.3	0.2	0.2	0.1
N° átomos	1.7715E+27	6.72E+26	4.1101E+27	9.96E+25	1.63E+25	1.41E+25	4.46E+24	4.08E+24	3.79E+24	2.46E+24	1.79E+24

El número de átomos de c/u de los elementos lo podemos calcular:

$$\text{Nro. átomos} = \text{masa persona} \times \% \text{ masa del elemento} / (\text{u} \times \text{masa atómica})$$

Sumo los átomos de c/u de los elementos y obtengo:

$$6,70 \times 10^{27} \text{ átomos} \sim 10^{28} \text{ átomos}$$

Serían: $7 \times 10^{27} \text{ átomos} \sim 10^{28} \text{ átomos}$



Ejemplo: Ejercicio 1.8

Veamos algo más fácil... como lo haría Fermi

Puedo suponer que el ser humano está compuesto por 100% de agua (H₂O).

La masa de una molécula de agua vale:

$$18 \text{ g/mol} = 18 \times 10^{-3} \text{ kg} / (6,022 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}) = 2,99 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Por tanto si la masa de la persona es de 70 kg, entonces el número de átomos será:

$$\frac{70 \text{ kg}}{2,99 \times 10^{-26} \text{ kg/molécula}} \times \frac{3 \text{ átomos}}{\text{molécula}} = 7,02 \times 10^{27} \text{ átomos}$$

Serían: 7×10^{27} átomos $\sim 10^{28}$ átomos

Obtengo el mismo orden de magnitud: 10^{28} !!!

Se estima que el nro. de átomos en el universo observable oscila entre 10^{78} y 10^{82} .

El número de átomos de la Tierra es de 10^{50}

03- Leyes de escala



Leyes de Escala

¿Son posibles estas criaturas de este tamaño?



Leyes de escalas

Parece que una hormiga es increíblemente fuerte respecto a su tamaño: puede cargar el peso de varias hormigas.

Sin embargo, un elefante no podría cargar a otro elefante.

Si hiciéramos una hormiga del tamaño de un elefante, ¿sería una súper-hormiga?

Veremos que no es posible la existencia de una hormiga de tal tamaño...

Galileo (1638, "Dos nuevas ciencias") cuando una forma crece en tamaño, su volumen crece más rápido que su superficie.



"Cuando un objeto crece sin cambiar de forma, de modo que una longitud característica del mismo (por ejemplo, su altura) se multiplica por un factor, su superficie se multiplica por el cuadrado de ese factor, en tanto que su volumen se multiplica por el cubo de su factor."

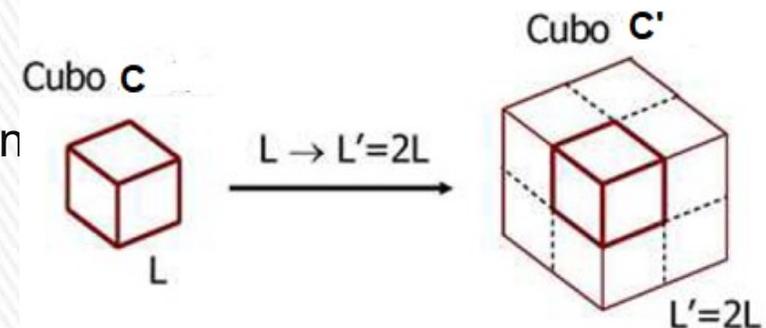
Ley cuadrática-cúbica...

Leyes de escalas

Cómo varían con el tamaño de un objeto las magnitudes longitud, área y volumen.

Dos cubos: C con arista L y C' con arista $L' = 2L$.

El segundo cubo, es mayor que el primer cubo, con un factor de escala k , con $k = 2$.



El **factor de escala (k)** es la razón de longitudes correspondientes en dos figuras semejantes (también se le llama **razón de semejanza**).

Dos cuerpos son **semejantes** cuando la razón entre las dimensiones lineales que lo caracterizan es la misma, cualesquiera que sean éstas

Si comparamos **áreas**, una cara de C' tiene 4 veces el área de una cara de C: la razón entre estas áreas es $k^2 = 2^2 = 4$. Es decir: $S' = 2^2 S = 4 S$

Volumen, volumen de C' es 8 veces volumen de C, razón de volúmenes es:

$k^3 = 2^3 = 8$. Es decir: $V' = 2^3 V = 8 V$

$$S = 6 L^2$$

$$V = L^3 \text{ por lo tanto: } L = V^{1/3}$$

$$\text{Entonces: } S = 6 L^2 = 6 (V^{1/3})^2 = 6 V^{2/3}$$

$$S = 6V^{2/3}$$

es una relación que se cumple para cualquier cubo.

Relación cúbica-cuadrática para los cubos.

Este resultado, obvio para un cubo, es también cierto para cualquier par de figuras o cuerpos semejantes, prescindiendo de la forma.

Leyes de escalas

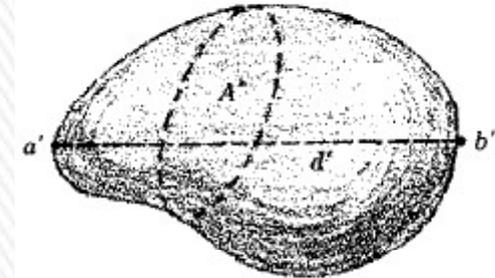
Dos figuras cualesquiera semejantes de distinto tamaño, su factor de escala k , es el cociente de longitudes correspondientes de las figuras

$$k = \frac{d'}{d}$$

Como son semejantes, el factor de escala k es el mismo para dos longitudes cualesquiera.

La razón entre las áreas transversales A y A' vale: $\frac{A'}{A} = k^2$

La razón entre los volúmenes V y V' vale: $\frac{V'}{V} = k^3$



La importancia de estas relaciones se debe a que ciertas propiedades físicas dependen del volumen y otras dependen del área.

Ejemplo: el peso de un animal depende de su volumen.

Si W y W' son los pesos de dos animales de la misma forma, se puede escribir:

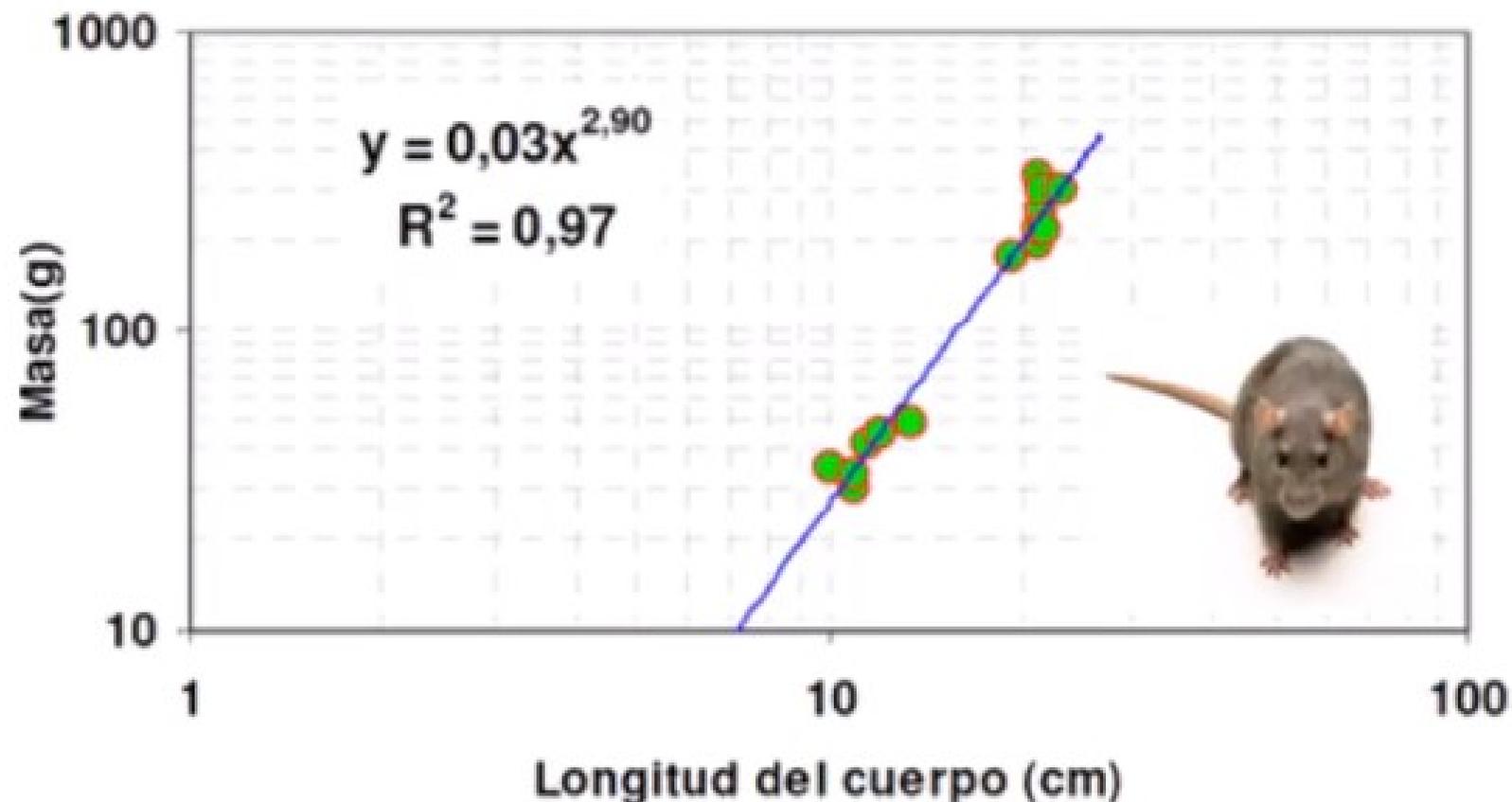
$$W = aV \quad \text{y} \quad W' = aV'$$

donde a es una constante de proporcionalidad igual para c/u.

Se cumple:

$$\frac{W'}{W} = \frac{aV'}{aV} = \frac{V'}{V} = k^3$$

Hay ratones que guardan una relación casi cúbica entre la masa y la longitud del cuerpo.



La importancia de estas relaciones se debe a que ciertas propiedades físicas dependen del volumen y otras dependen del área.
La masa y el peso son proporcionales al volumen.
Mientras que la fuerza de cualquier organismo depende del área de la sección transversal, es decir de la superficie.

EJEMPLO: Ejercicio 10

Una mujer de 1,55 m de altura pesa 50 kg. ¿Cuánto pesaría una mujer de 1,70 m y forma semejante?

Datos: $L = 1,55$ m; $W = 50$ kg; $L' = 1,70$ m

Modelamos a las mujeres como semejantes, entonces su factor de escala k vale:

$$k = \frac{L'}{L} = \frac{1,70}{1,55} = 1,09677$$

Por lo visto, el peso varía en función de k^3 :

$$W' = k^3 W = (1,09677)^3 (50) = 65,966$$

Expresando el resultado con dos cifras significativas:

$$W' = 66 \text{ kg}$$

Leyes de escalas

Si aumento el tamaño (dimensiones lineales) de un cuerpo en un cierto factor, conservando su forma, su superficie (área) aumentará como el cuadrado de ese factor y su volumen como el cubo.

Este fenómeno se suele expresar con la notación: $S \propto l^2$ $V \propto l^3$

A partir de estas relaciones podemos escribir la siguiente relación entre dos cuerpos 1 y 2:

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 = \left(\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Si tomamos S_1 y V_1 como valores iniciales para un cuerpo cualquiera, resulta que cuando extrapolamos a tamaños distintos, la relación entre la nueva superficie S y el nuevo volumen V es:

$$S = KV^{\frac{2}{3}}$$

Ley cuadrática-cúbica

para el cubo vimos que $K=6$

K constante que depende de los valores iniciales, es decir, de la forma del cuerpo.

Para esferas: superficie $S = 4\pi R^2$ y volumen $V = \frac{4\pi R^3}{3}$, (R es el radio),
 $R = (3V/4\pi)^{1/3}$ entonces relación entre superficie y volumen es:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 = \frac{2}{3^{\frac{2}{3}}} (4\pi)^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}} \cong 4,84 \times V^{\frac{2}{3}} = 4,84 \times V^{0,667}$$

La esfera es el cuerpo con menor superficie para un volumen dado. Para un cuerpo con cualquier otra forma, el coeficiente K será siempre más grande que 4,84.

Leyes de escalas

Este tipo de relaciones se les llama **leyes de escala isométricas**.

Es útil visualizar las relaciones del tipo $y = kx^a$ en gráficos en los que se representen en abscisas y ordenadas los logaritmos (decimales o neperianos) de los parámetros en lugar de los parámetros mismos. Usando las propiedades de los logaritmos: $\log(y) = \log(k) + a \cdot \log(x)$

Para el caso que estamos considerando, tendríamos: $\log S = \log K + \frac{2}{3} \log V$

que implica que obtenemos una recta de pendiente igual a 2/3.

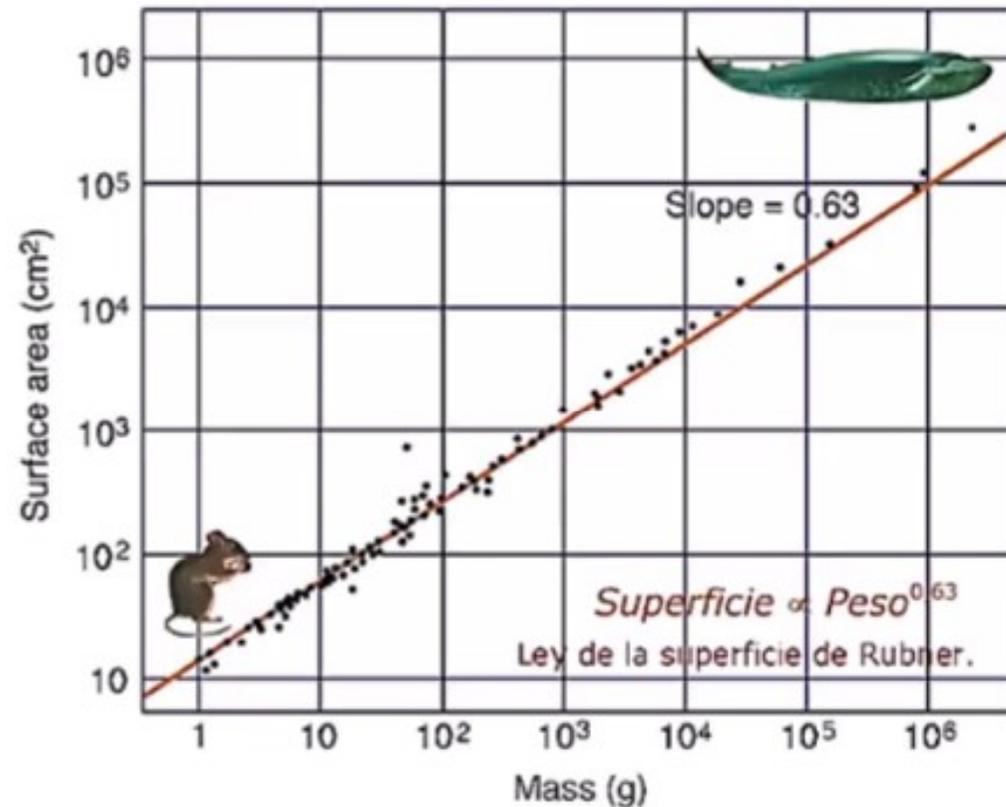
Si consideramos cuerpos de seres vivos, con una densidad constante en todos ellos, aproximadamente la del agua, entonces la recta que relaciona superficie corporal y masa tiene la misma pendiente.

Superficie corporal en función de la masa para vertebrados.
Hemmingsen (1960)

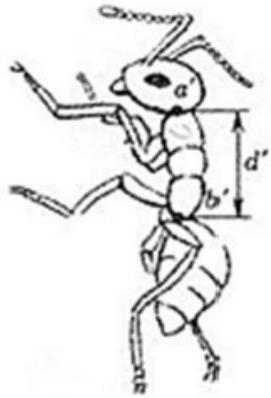


Leyes de escalas

Relación entre
el área
superficial
y la masa de
mamíferos



Leyes de escalas-Fuerza relativa



HORMIGA GIGANTE



HORMIGA NORMAL

Las relaciones o leyes de escala, son las expresiones de los **cambios funcionales y estructurales que tienen lugar como consecuencia de los cambios de tamaño (cambios de escala) en los organismos.**

Dos hormigas semejantes (de forma y composición idénticas). La hormiga gigante tiene un factor de escala $k = d'/d$ con respecto a la hormiga normal.

Por tanto la hormiga gigante pesa k^3 veces lo que la hormiga normal.

Se ha comprobado que la fuerza de cualquier organismo depende solamente del área de la sección transversal de sus músculos.

Por ejemplo el levantador de pesas: la longitud de sus brazos es normal, lo que es extraordinariamente grande es la sección transversal de sus brazos.

Se llama **fuerza relativa de un animal** al peso que puede levantar (o soportar) por la acción de sus músculos dividido por su propio peso.

El peso máximo que se puede sostener contra la gravedad terrestre depende de la fuerza muscular y ésta de la sección total de los músculos que intervienen en dicha acción, mientras que el propio peso del animal es proporcional a su volumen.

Sea $F_{\text{máx}}$ el peso máximo que puede levantar o la fuerza máxima que puede realizar la hormiga y W su propio peso, entonces la **fuerza relativa f** vale:

$$f = \frac{F_{\text{máx}}}{W}$$

Leyes de escalas-Fuerza relativa

Sean W' y $F'_{m\acute{a}x}$ el peso y la fuerza máxima que puede realizar la hormiga gigante. Como el volumen y la superficie son proporcionales, se cumple:

$W' = k^3W$ y $F'_{m\acute{a}x} = k^2F_{m\acute{a}x}$ por lo tanto:

$$f' = \frac{F'_{m\acute{a}x}}{W'} = \frac{k^2 F_{m\acute{a}x}}{k^3 W} = \frac{F_{m\acute{a}x}}{kW} = \frac{1}{k} f$$

$$f' = \frac{1}{k} f$$

Entonces, la fuerza relativa de la hormiga gigante es menor que la de la hormiga normal y se reduce en un factor $1/k$.

Comúnmente se dice que una hormiga es enormemente fuerte, pues puede levantar de 10 a 50 veces su peso, es decir su fuerza relativa varía entre 10 y 50.

La de un hombre sera de 0,50 (suponiendo que puede levantar la mitad de su peso). Comparar las fuerzas relativas es erróneo, la fuerza relativa de la hormiga es tan grande, justamente por su pequeño tamaño.

Para evaluar la fuerza real de la hormiga se tiene que tener en cuenta la diferencia de tamaños.

Una hormiga normal tiene una longitud de 1,2 cm, mientras que un hombre tiene una longitud de 1,8 m. Una hormiga gigante, del tamaño de un hombre tendra un factor de escala de:

$$k = \frac{180 \text{ cm}}{1,2 \text{ cm}} = 150$$



Leyes de escalas-Fuerza relativa

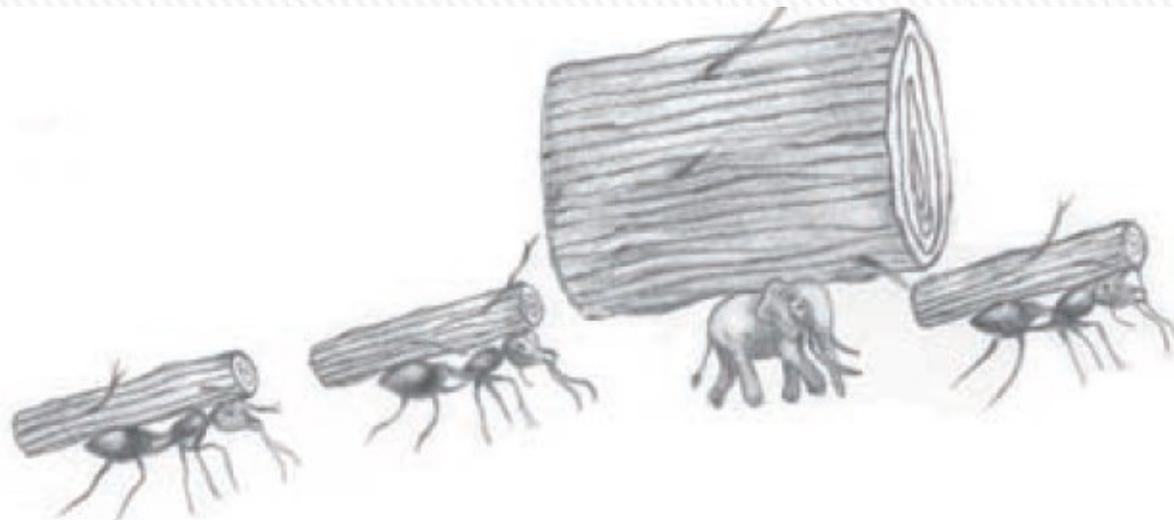
Por tanto la fuerza relativa de una hormiga gigante (suponiendo $f = 30$) de:

$$f' = \frac{1}{k} f = \frac{1}{150} \times 30 = \frac{1}{5} = 0,20 \quad \text{Menor que la del hombre!!!}$$

O dicho de otra forma, un hombre del tamaño de una hormiga normal tendría una fuerza relativa de:

$$f' = \frac{1}{k} f = \frac{1}{\frac{1}{150}} \times 0,50 = 150 \times 0,50 = 75$$

Por lo tanto, una hormiga es intrínsecamente más débil que un hombre o un elefante. De hecho, **una hormiga gigante del tamaño humano no sería una criatura biológicamente viable: ya que sólo podría levantar un porcentaje pequeño de su peso, incluso no podría levantar ni siquiera sus patas!**



Fuerza relativa de dos animales con el mismo tamaño (el de una hormiga) pero con formas distintas (de elefante y de hormiga).

Leyes de escalas -Fuerza relativa

Lo dicho acerca de la fuerza de los músculos se aplica también a los huesos y cualquier otro material estructural.

Para un animal de forma dada, la resistencia de sus huesos con respecto a su propio peso depende de su tamaño, y cuanto mayor sea el animal, más pequeña es su fuerza relativa. La forma de los animales grandes es muy diferente a la de animales pequeños.



Mosca, perro y elefante representados como si tuvieran el mismo tamaño. Notar la diferencia en el grosor relativo de las extremidades.

El ancho de las patas del elefante es mucho mayor que las del perro, y éste que el de la mosca.

Un animal del tamaño de un elefante no puede tener la forma de un perro porque el cociente resistencia de los huesos y el peso del cuerpo sería muy pequeño.

Los huesos y músculos de los animales grandes deben ser desproporcionadamente más anchos que huesos y músculos de animales pequeños.



EJEMPLO: ejercicio 10 continuación

Una mujer de 1,55 m de altura pesa 50 kg. ¿Cuánto pesaría una mujer de 1,70 m y forma semejante?

Datos: $L = 1,55$ m; $W = 50$ kg; $L' = 1,70$ m

Modelamos a las mujeres como semejantes, entonces su factor de escala k vale:

$$k = \frac{L'}{L} = \frac{1,70}{1,55} = 1,09677$$

Por lo visto, el peso varía en función de k^3 : $W' = k^3 W = (1,09677)^3 (50) = 65,966$

Expresando el resultado con dos cifras significativas: **$W' = 66$ kg**

Supongamos que la mujer de 1,55 m y 50 kg, puede levantar una masa de hasta 25 kg. ¿Cuánto podrá levantar una mujer semejante de 1,70 m?

La fuerza relativa de la mujer de 1,55 m vale: $f = \frac{F_{\text{máx}}}{W} = \frac{25}{50} = 0,50$

Mientras que la fuerza relativa de la mujer de 1,70 m vale: $f' = \frac{f}{k} = \frac{0,50}{1,09677} = 0,4559$

Por tanto podrá levantar una masa de hasta:

$$F'_{\text{máx}} = f' \cdot W' = 0,4549 \times 65,966 = 30,0 \text{ kg}$$

Podrá levantar hasta una masa de 30 kg

Leyes de escalas -Fuerza relativa

El efecto de escala interviene en otras propiedades fisiológicas.

Las **velocidades a la que se extrae el oxígeno del aire, a la que los alimentos se digieren y absorben en el intestino, a la que se pierde calor en la superficie del cuerpo, son proporcionales a las áreas de los pulmones, intestinos y la piel respectivamente, por tanto a k^2 .**

La **velocidades a la que se debe suministrar oxígeno o alimento, o a la que se produce calor es proporcional a la masa (por tanto al volumen) del animal, por tanto a k^3 .**

Esto repercute en la rapidez carrera, altura en saltos, potencia desarrollada.

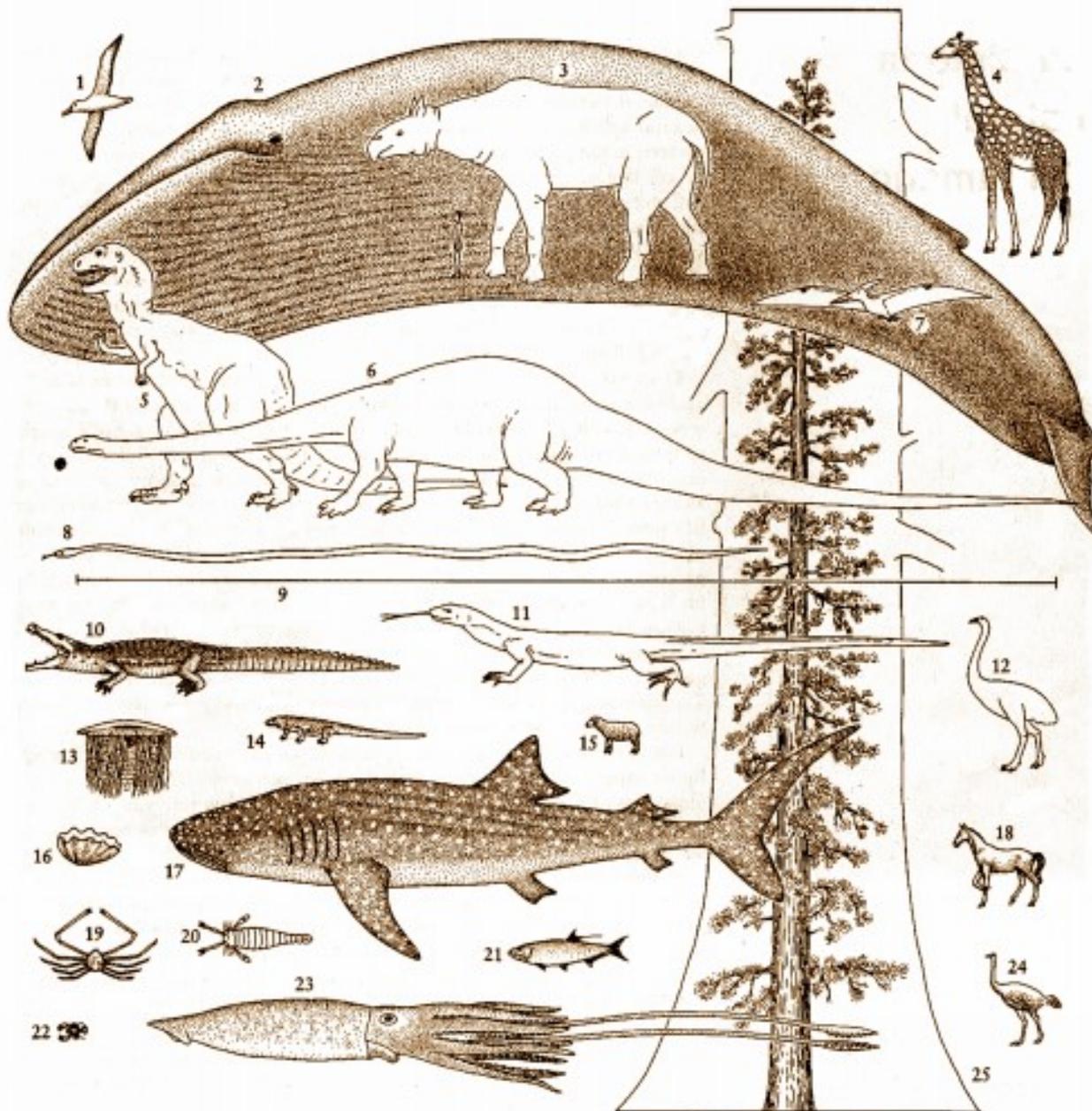
Estas consideraciones muestran que para cada tipo de animal hay un tamaño óptimo. No obstante, aunque Galileo demostró lo contrario hace más de trescientos años, todavía creemos que si una hormiga fuera tan grande como un hombre tendría una fuerza enorme o que podrían existir animales de tamaños descomunales como Godzilla o King Kong.

De hecho, el mayor animal que ha existido es la ballena azul (con un peso de hasta 170 toneladas) y su tamaño es posible porque es un animal acuático.

El mayor dinosaurio que existió fue un saurópodo el Argentinosaurio con un peso estimado entre 65 y 90 toneladas.

La figura siguiente muestra distintos animales representados a la misma escala.

Organismos de mayor tamaño (todos a la misma escala)



1. La mayor ave voladora (albatros);
2. El mayor animal conocido (ballena azul);
3. El mayor mamífero terrestre extinto (Baluchitherium), junto a una figura humana como punto de comparación;
4. El animal terrestre vivo más alto (jirafa)
5. Tyrannosaurus;
6. Diplodocus;
7. Uno de los mayores reptiles voladores (Pteranodon);
8. La mayor serpiente extinta;
9. Longitud de la mayor tenia encontrada en el hombre;
10. El reptil vivo más largo (cocodrilo de África occidental);
11. El mayor lagarto extinto;
12. La mayor ave extinta (Aepyomis);
13. La mayor medusa (Cyanea);
14. El mayor lagarto vivo (dragón Komodo);
15. Oveja;
16. El mayor molusco bivalvo (Tridacna);
17. El mayor pez (tiburón ballena);
18. Caballo; 19. El mayor crustáceo (cangrejo araña del Japón);
20. El mayor escorpión marino (Euriptérico);
21. Sábalo real;
22. La mayor langosta;
23. El mayor molusco (calamar gigante, Architeuthis);
24. Avestruz;
25. Los primeros 32 m del mayor organismo conocido (secoya gigante), superpuestos a un alerce de 30 m