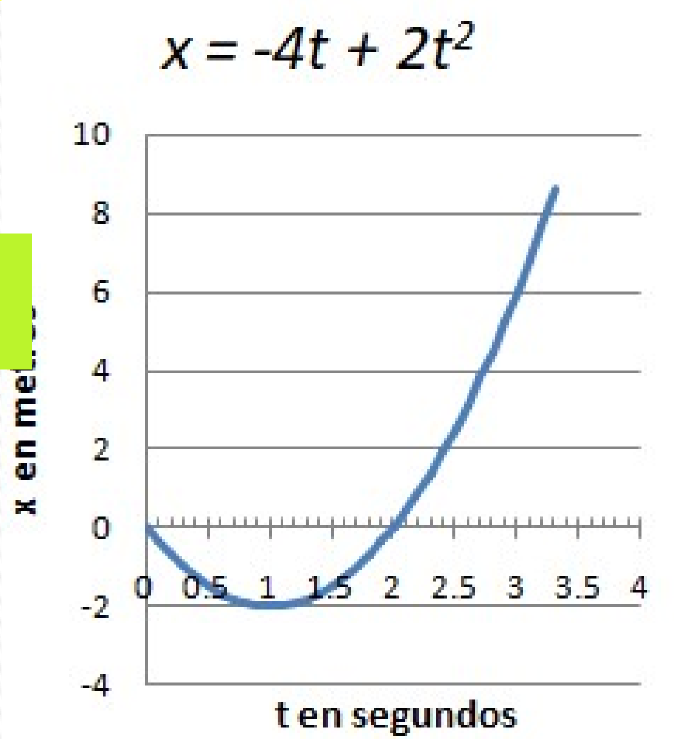
04.1-MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN

Ejemplo: velocidad media e instantánea

Una partícula se mueve a lo largo del eje *x. Su posición varía con el tiempo* de acuerdo con la expresion $x = -4t + 2t^2$, *donde x está en metros y t está en* segundos.



a) *Determine el desplazamiento de la partícula en los intervalos de tiempo: t=0 a t=1 s y t =1 s a t =3 s.*

Aunque no lo pide, construimos la gráfica posición-tiempo para este movimiento:

Se puede ver que la partícula se mueve en la dirección *x negativa durante el* primer segundo de movimiento, en el momento *t =1 s está momentáneamente* en reposo y se mueve en la dirección *x positiva en tiempos t >1 s.*

Atención!!!: la partícula no se mueve en una trayectoria curva en el espacio, tal como la que muestra la curva azul de gráfica, se mueve sólo a lo largo del eje *x* en una dimensión

El desplazamiento se define como $\Delta x = x(t_F) - x(t_I)$

Entonces calculo las posiciones para los distintos instantes:

$x(0) = -4(0) + 2(0)^2 = 0;$ $x(1) = -4(1) + 2(1)^2 = -4+2 = -2$ $x(3) = -4(3) + 2(3)^2 = -12+18 = 6$

$\Delta x_{0-1} = x(1) - x(0) = -2 - (0) = -2$ m

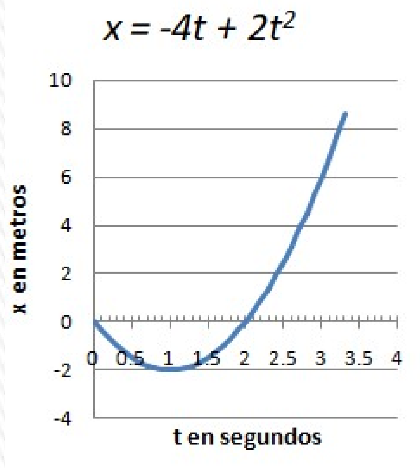
$\Delta x_{1-3} = x(3) - x(1) = 6 - (-2) = 8$ m

$\Delta x_{0-1} = -2$ m $\Delta x_{1-3} = 8$ m

Simplemente para facilitar la lectura, la expresión se escribe como $x = -4t + 2t^2$ en lugar de $x = (-4.00\ \text{m/s})t + (2.00\ \text{m/s}^2)t^{2.00}$. Cuando una ecuación resuma observaciones, considere que sus coeficientes tienen tantos dígitos significativos como otros datos citados en el problema. Considere que sus coeficientes tienen las unidades requeridas para una consistencia dimensional. Cuando inicie el cronómetro en $t = 0$, por lo general no se tiene la intención de limitar la precisión a un solo dígito.

Ejemplo: lanzamiento de una piedra

b) Calcule la velocidad promedio durante los dos intervalos de tiempo anteriores.



La velocidad media la calculamos como: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_F) - x(t_I)}{t_F - t_I}$

$$v_{m0-1} = \frac{\Delta x_{0-1}}{\Delta t} = \frac{-2}{1-0} = -2\ m/s$$

$$v_{m1-3} = \frac{\Delta x_{1-3}}{\Delta t} = \frac{8}{3-1} = 4\ m/s$$

Velocidades medias:
v_{m0-1}= -2 m/s; v_{m1-3}= 4 m/s

c) Encuentre la velocidad instantánea de la partíula en *t* =2,5 s.

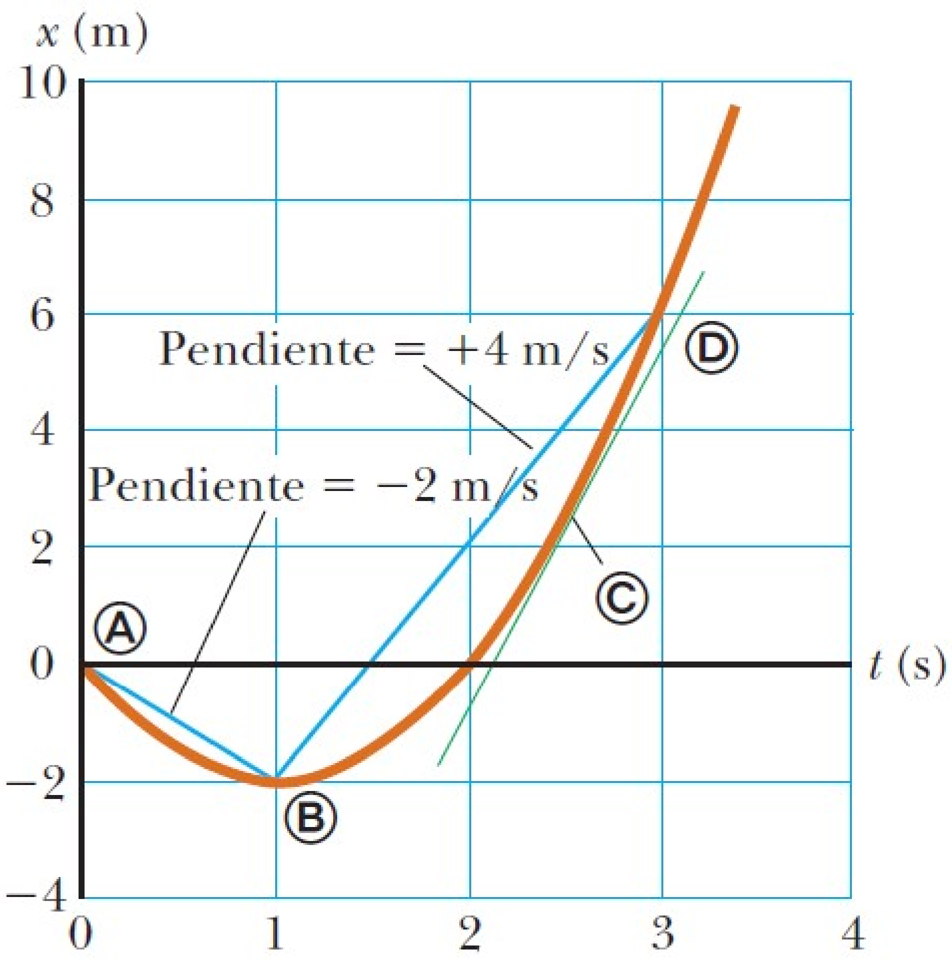
Primero determino la expresión de la velocidad instantánea

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-4t + 2t^2) = -4 + 4t$$

y ahora evalúo en *t* = 2,5 s

$$v(2{,}5) = -4 + 4(2{,}5) = -4 + 10 = 6\ m/s$$

$v(t = 2{,}5\ s) = 6\ m/s$



Observar lo siguiente:

$v_{m0\text{-}1}$ = -2 m/s es la pendiente de la recta A-B

$v_{m1\text{-}3}$= 4 m/s es la pendiente de la recta B-D

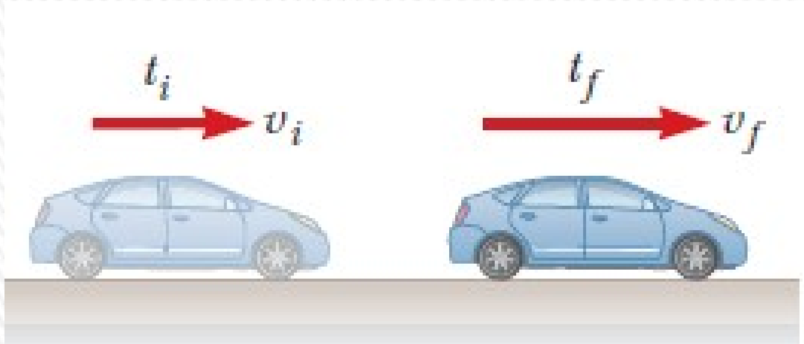
$v(t$ = 2,5 s) = 6 m/s es la pendiente de la recta tangente al punto C

Aceleración

Un automóvil difícilmente viaja distancias considerables con velocidad constante. La velocidad del automóvil se incrementa cuando pisa irme el acelerador y disminuye cuando aplica los frenos. Además, la velocidad también cambia cuando rodea una curva, alterando su dirección de movimiento.

El cambio de velocidad de un objeto al transcurrir el tiempo se le conoce como **aceleración**

Aceleración media



Un automóvil se mueve a lo largo de una ruta recta, en el instante t_i *tiene una velocidad de* v_i *y en el momento* t_f *su velocidad es* v_f*, con* $\Delta v = v_f - v_i$ y, $\Delta t = t_f - t_i$

La aceleración media a_m durante el intervalo de tiempo Δt es el cambio en la velocidad Δv dividida entre Δt:

$$a_m \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

Unidades SI: metros por segundo por segundo (m/s^2)

Aceleración media

Para el caso de movimiento en línea recta, el sentido de la velocidad de un objeto y el sentido de su aceleración están relacionadas como sigue:

- si la velocidad y aceleración de un objeto tienen el mismo sentido, la rapidez del objeto se incrementa con el tiempo (aumenta su magnitud).
- si la velocidad y la aceleración de un objeto tienen sentidos opuestas, la rapidez del objeto disminuye con el tiempo (disminuye la magnitud de la rapidez).

La aceleración negativa no necesariamente significa que un objeto esté disminuyendo su velocidad. Si la aceleración es negativa y la velocidad también es negativa,
¡el objeto está aumentando su velocidad!
La palabra ***desaceleración*** significa una reducción en la rapidez, una disminución de velocidad. La confusión está con la aceleración negativa, que en ocasiones puede aumentar.

Aceleración instantánea

Como el valor de la aceleración media pueda variar en intervalos de tiempo diferentes, debemos definir la **aceleración instantánea**, en forma similar a la velocidad instantánea.

La **aceleración instantánea *a*** es el límite de la aceleración media conforme el intervalo de tiempo *Δt* tiende a cero:

Usaremos simplemente el término *aceleración* para referirnos a "aceleración instantánea".

$$a \equiv \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aceleración instantánea como derivada de *v*(t)

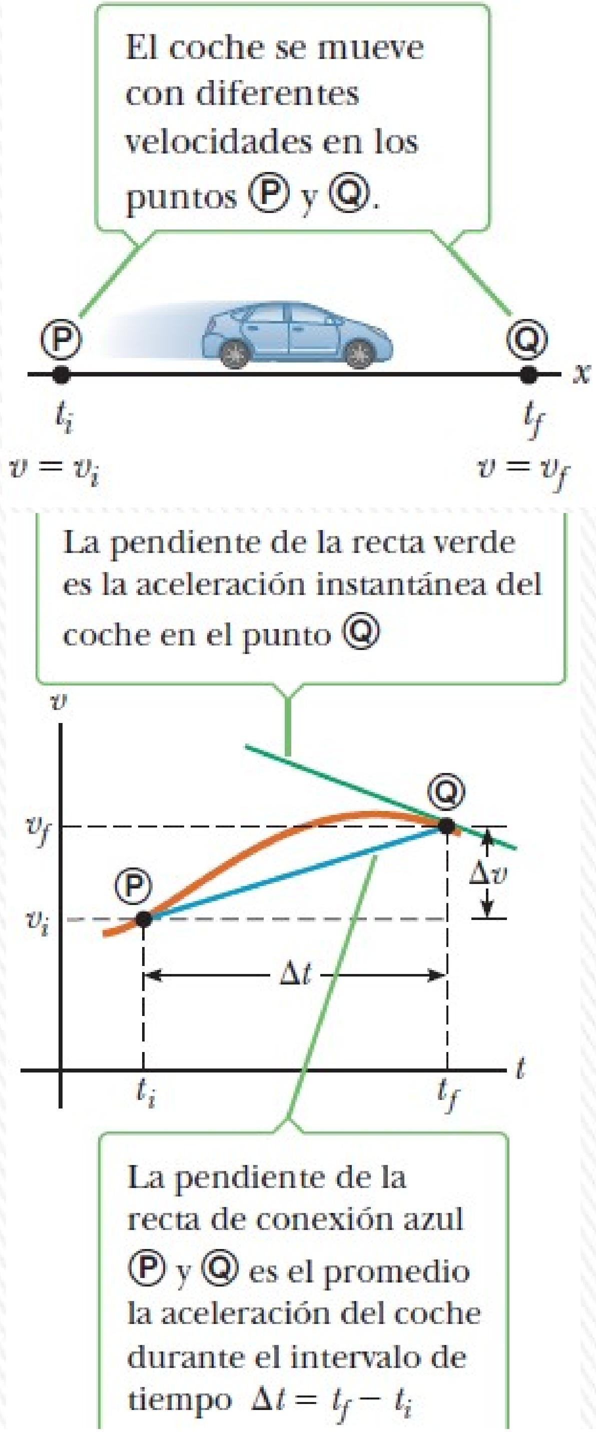
Vimos que la aceleración instantánea era el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, usando nuevamente las técnicas del cálculo, este límite de cociente incremental cuando Δt tiende a cero, representa una derivada .

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Es decir que la aceleración instantánea es derivada respecto al tiempo de la velocidad instantánea *v*(*t*).

Así como *v*(t) es la derivada de la ley horaria *x*(t) respecto al tiempo, la aceleración instantánea es la derivada de *v*(t) respecto al tiempo, entonces es la derivada segunda de *x* respecto a *t*

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

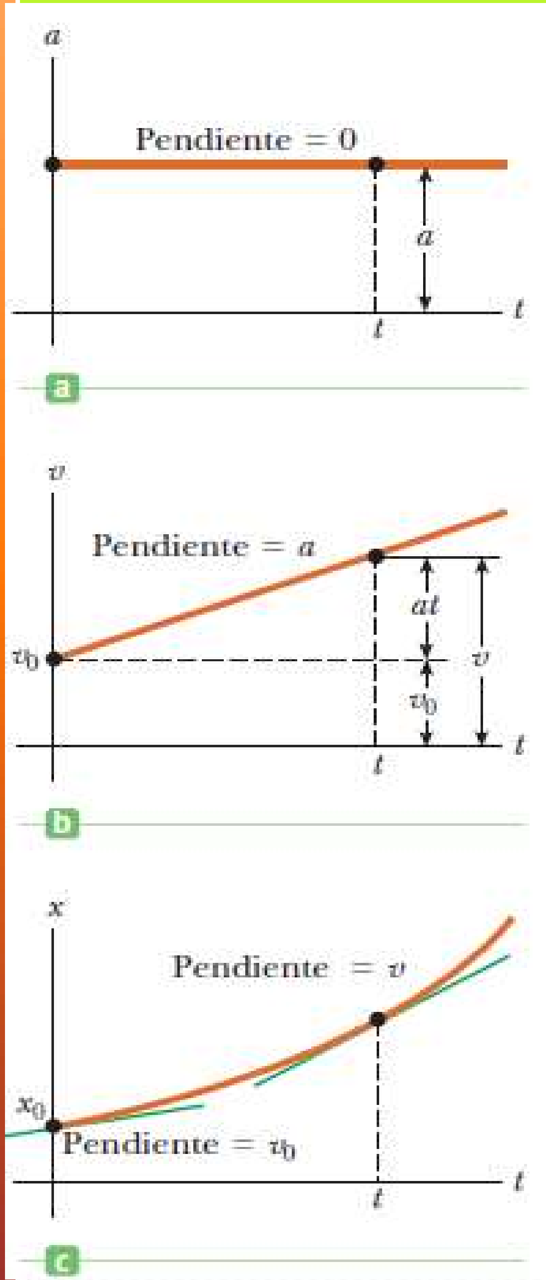


Aceleración instantánea

Gráfica de **velocidad vs. tiempo**, traza la velocidad de un objeto en términos del tiempo.
Por ejemplo, se representa el movimiento de un automóvil a lo largo de una calle con mucho tráfico.
La aceleración media del automóvil entre los tiempos t_i y t_f se puede hallar mediante la determinación de la pendiente de la recta que une los puntos P y Q.
Si pensamos que el punto P se acerca más y más al punto Q, la recta se aproxima cada vez más y se convierte en tangente en Q.
La **aceleración (instantánea) de un objeto en un tiempo determinado es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica velocidad vs. tiempo en ese tiempo.**

Si la aceleración es constante en un movimiento rectilíneo, la gráfica velocidad *vs.* tiempo del movimiento es una línea recta y la aceleración instantánea es igual a su aceleración media.

Movimiento en una dimensión con aceleración constante



Un ejemplo de este movimiento es el de caída de los cuerpos si ignoramos la resistencia del aire

La gráfica de aceleración en función del tiempo para este caso se muestra en la figura a, y tenemos que la aceleración instantánea es igual a la aceleración media:

$\mathbf{a = a_m}$

La gráfica de la velocidad (instantánea) *v* en términos de *t es* una línea recta con pendientes ya sea positiva, cero, o bien, negativa (figura b).

Siempre podemos definir al tiempo inicial como el instante 0 ($t_i=0$) y designar el tiempo final como un tiempo arbitrario *t* ($t_f=t$), además llamaremos a la velocidad inicial $v_i=v_0$ y a la velocidad final v_f como *v*, velocidad en cualquier tiempo arbitrario. Con esta notación, se puede expresar la aceleración como

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{v - v_0}{t - 0} = \frac{v - v_0}{t}$$

Por lo que:

$$v = v_0 + at$$

Movimiento en una dimensión con aceleración constante

Como la velocidad varía en forma lineal y a partir de la velocidad media:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{t} \qquad v_m = \frac{v + v_0}{2} \qquad \frac{\Delta x}{t} = \frac{v + v_0}{2}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v + v_0)t = \frac{1}{2}(v_0 + at + v_0)t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

por lo tanto:

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Esta ecuación también se puede re-escribir en términos de la posición *x*, a partir de: $\Delta x = x - x_0$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Movimiento en una dimensión con aceleración constante

Otra expresión útil es poder expresar el desplazamiento *Δx* sin que aparezca explícitamente el tiempo, que reordenando se puede escribir como:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

Veamos cómo podemos probar esto…. como: $v = v_0 + at$

despejando el tiempo: $t = \dfrac{v - v_0}{a}$

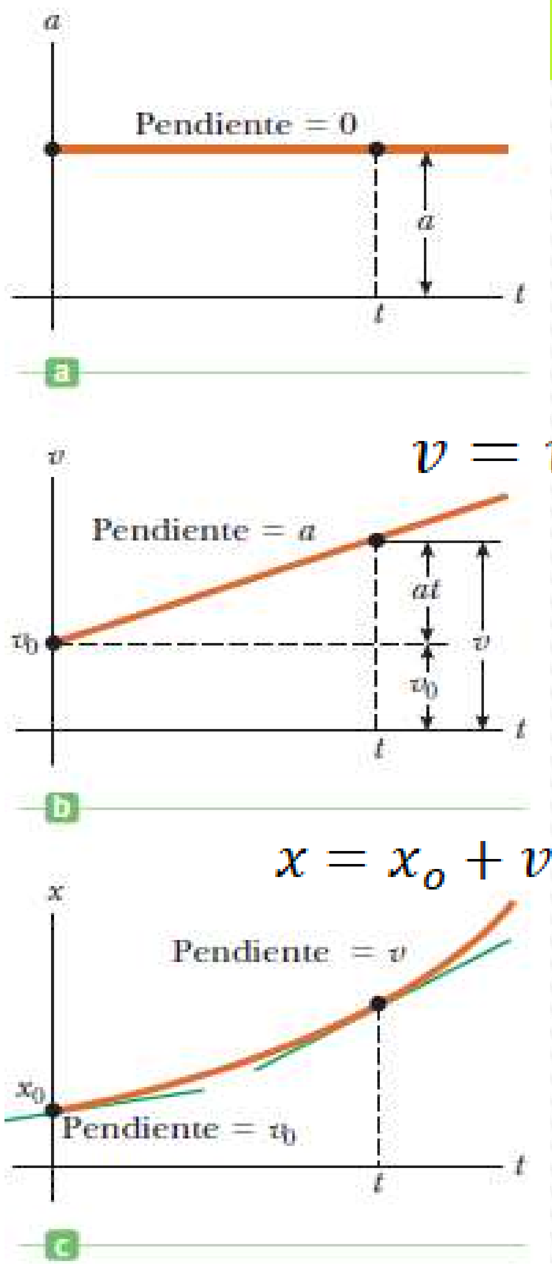
Por otro lado teníamos que: $\Delta x = v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2$

Sustituyendo la expresión del tiempo $\Delta x = v_0 \left(\dfrac{v - v_0}{a}\right) + \dfrac{1}{2} a \left(\dfrac{v - v_0}{a}\right)^2$

$$\Delta x = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \frac{v^2 - 2v_0 v + v_0^2}{a^2} = \frac{2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2v_0 v + v_0^2}{2a}$$

$$\Delta x = \frac{-2v_0^2 + v^2 + v_0^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \qquad 2a\Delta x = v^2 - v_0^2$$

Movimiento en una dimensión con aceleración constante



Veamos las representaciones gráficas de la aceleración, la velocidad y la posición en función del tiempo

$$v = v_0 + at$$

Notar que el área bajo la recta de la figura b es igual al desplazamiento *Δx* en el intervalo considerado.
Este resultado es general.

$$x = x_o + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

El área bajo la gráfica *v* en términos de *t* para cualquier objeto es igual al desplazamiento *Δx* del objeto.