7 - Movimiento en dos dimensiones

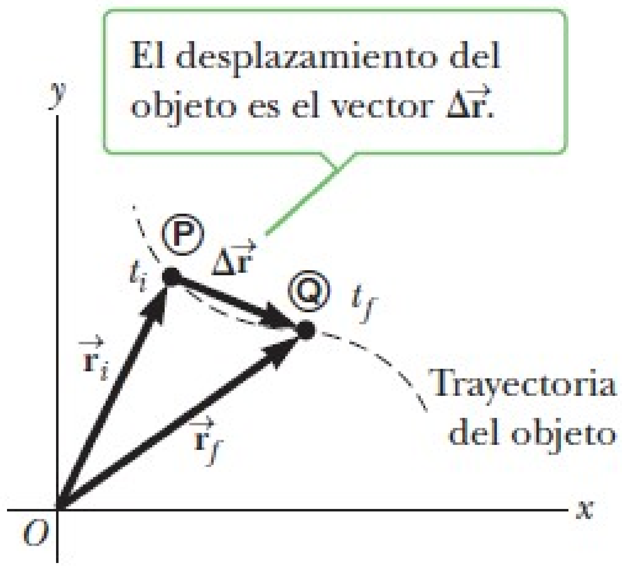
Expulsión de lava de una erupción volcánica. Advierta las trayectorias parabólicas de las brasas proyectadas al aire. Todos los proyectiles siguen una trayectoria parabólica en ausencia de resistencia del aire. (© Arndt/ Premium Stock/PictureQuest)

- **Desplazamiento, velocidad y aceleración en dos dimensiones.**
- **Movimiento de un proyectil.**
- **Componentes del vector aceleración.**

Desplazamiento, velocidad y aceleración en dos dimensiones

En un movimiento en una dimensión, la dirección y el sentido de una cantidad vectorial como la velocidad o la aceleración puede ser tomada en cuenta al especificar la cantidad ya sea positiva o negativa. Por ejemplo, la velocidad de un cohete es positiva si éste va hacia arriba y negativa si va hacia abajo. .

Esta solución simple no es posible en dos o tres dimensiones.
Se debe hacer uso **completo del concepto vectorial**.
Consideremos un objeto que se mueve a través del espacio como se muestra en la figura.



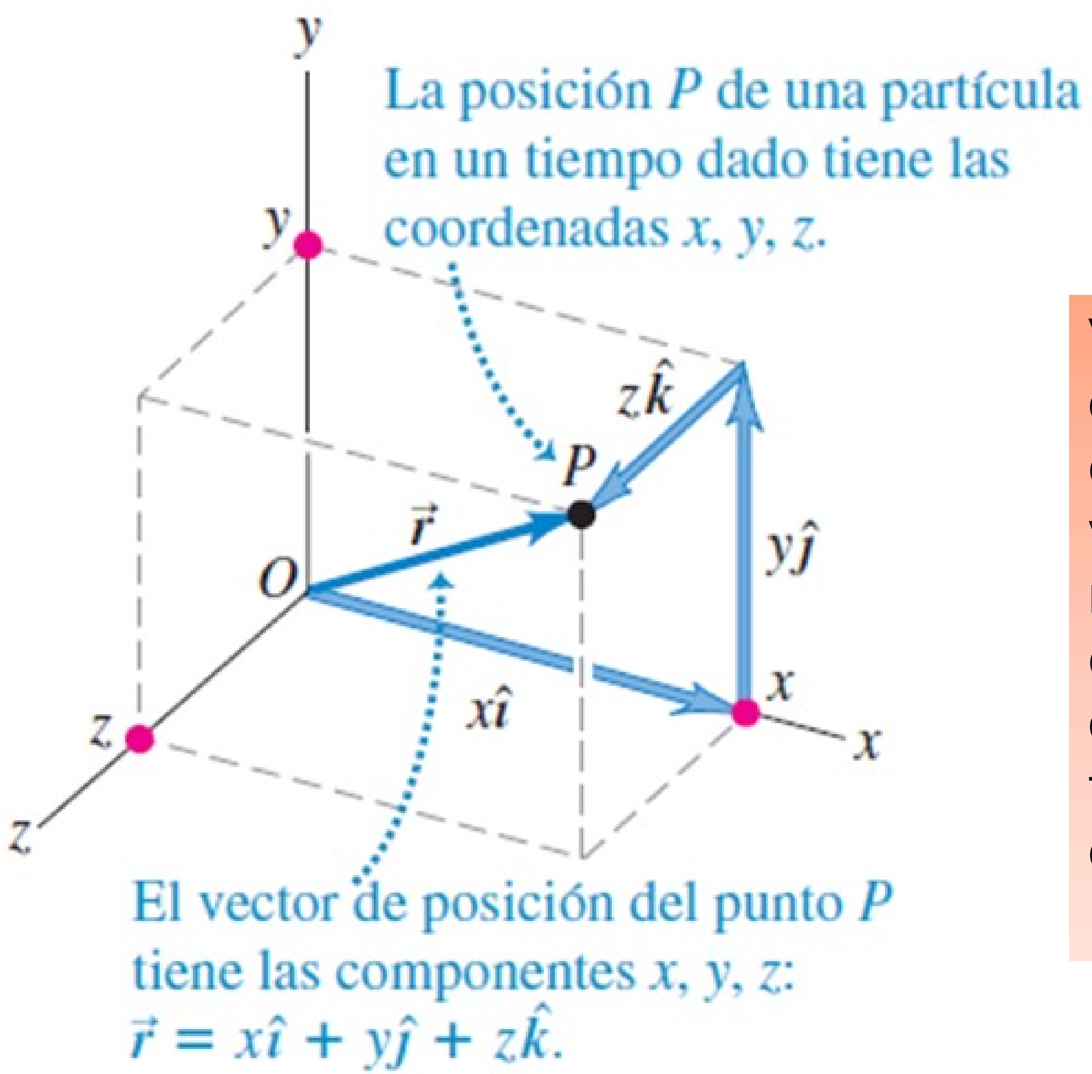
Cuando el objeto está en algún punto P en el tiempo t_i, *su posición se describe mediante* el **vector de posición r**$_i$, *dibujado desde el origen hasta P. Cuando el objeto se ha* movido hacia algún otro punto en el tiempo t_f, *su vector de posición es* ***r***$_f$.

Del diagrama vectorial de la figura, el vector de posición final es la suma del vector de posición inicial y el desplazamiento Δ**r**: $\bar{r}_f = \bar{r}_i + \Delta\bar{r}$

A partir de esta correspondencia, podemos redefinir las magnitudes físicas que vimos para el movimiento en una dimensión, en magnitudes vectoriales para movimiento en dos o tres dimensiones.

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

Vector posición $\vec{r}$ de una partícula en un instante dado es un vector que va del origen del sistema de coordenadas al punto *P*. Coordenadas *x*, *y* y *z* de *P* son las componentes *x*, *y* y *z* del vector.



$$\boldsymbol{r} = x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

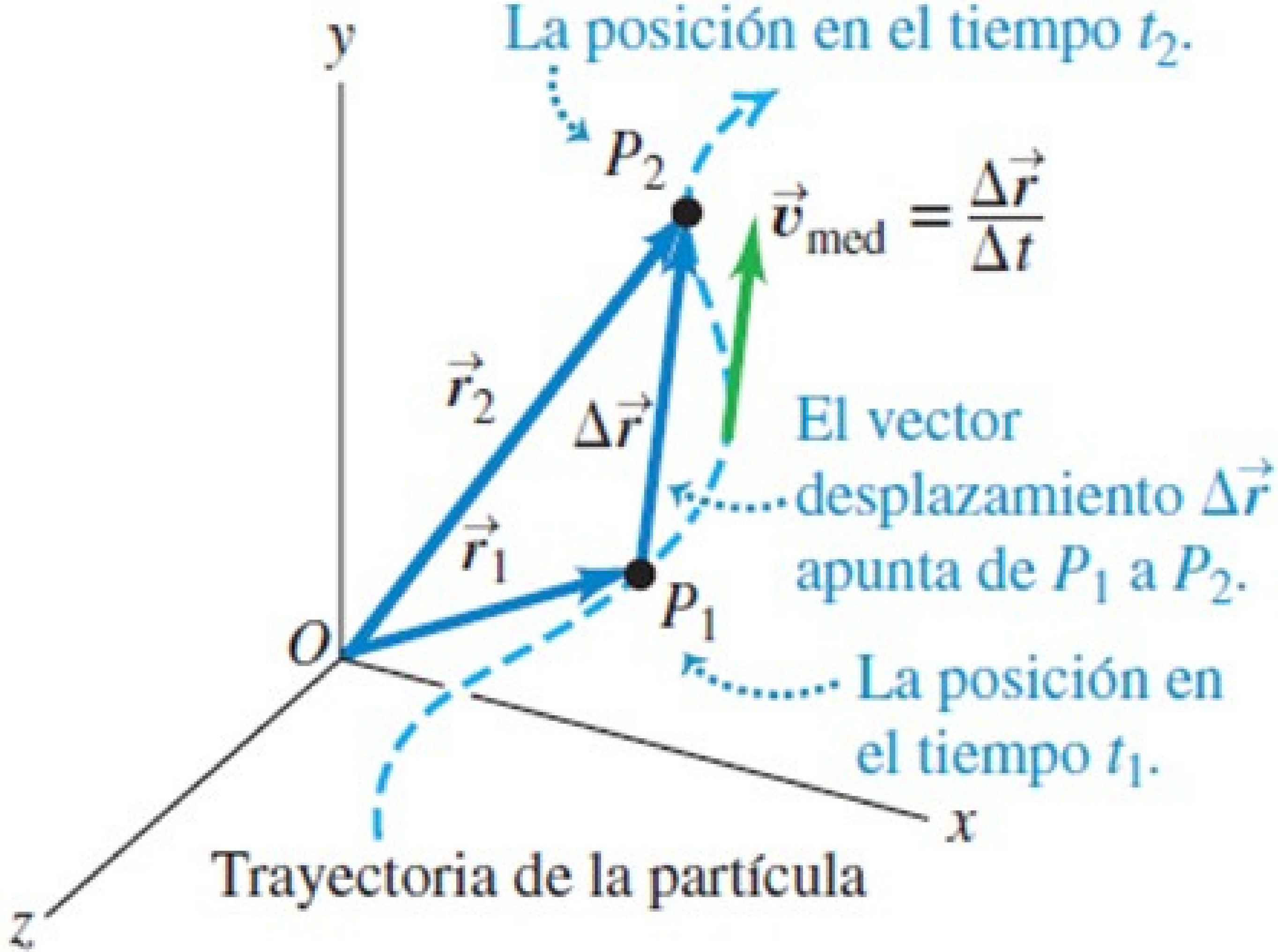
Vamos a extender las definiciones vistas en cinemática unidimensional de velocidades y aceleraciones medias e instantáneas al caso de dos y tres dimensiones. Pero ahora no trataremos a magnitudes escalares, sino vectoriales.

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

En un Δt la partícula se mueve de P_1 a P_2.

Desplazamiento: $\Delta\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1)\,\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\,\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\,\hat{k}$$



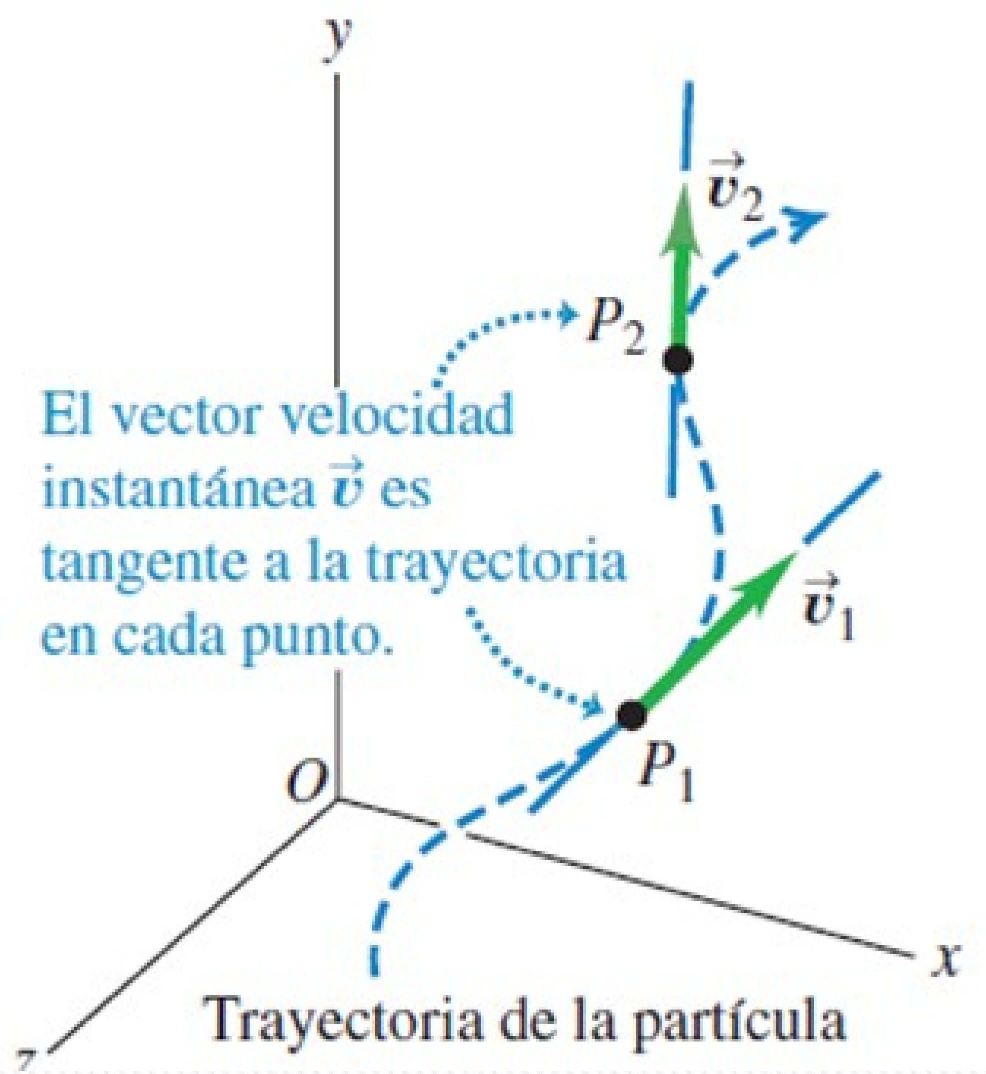
Velocidad media durante ese intervalo Δt:

$$\bar{v}_{med} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Rapidez media: es el cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo insumido.
Es un escalar y no siempre coincide con el módulo de la velocidad media.

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

Definimos la **velocidad instantánea**: $\overline{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$



$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{dx}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{dz}{dt}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

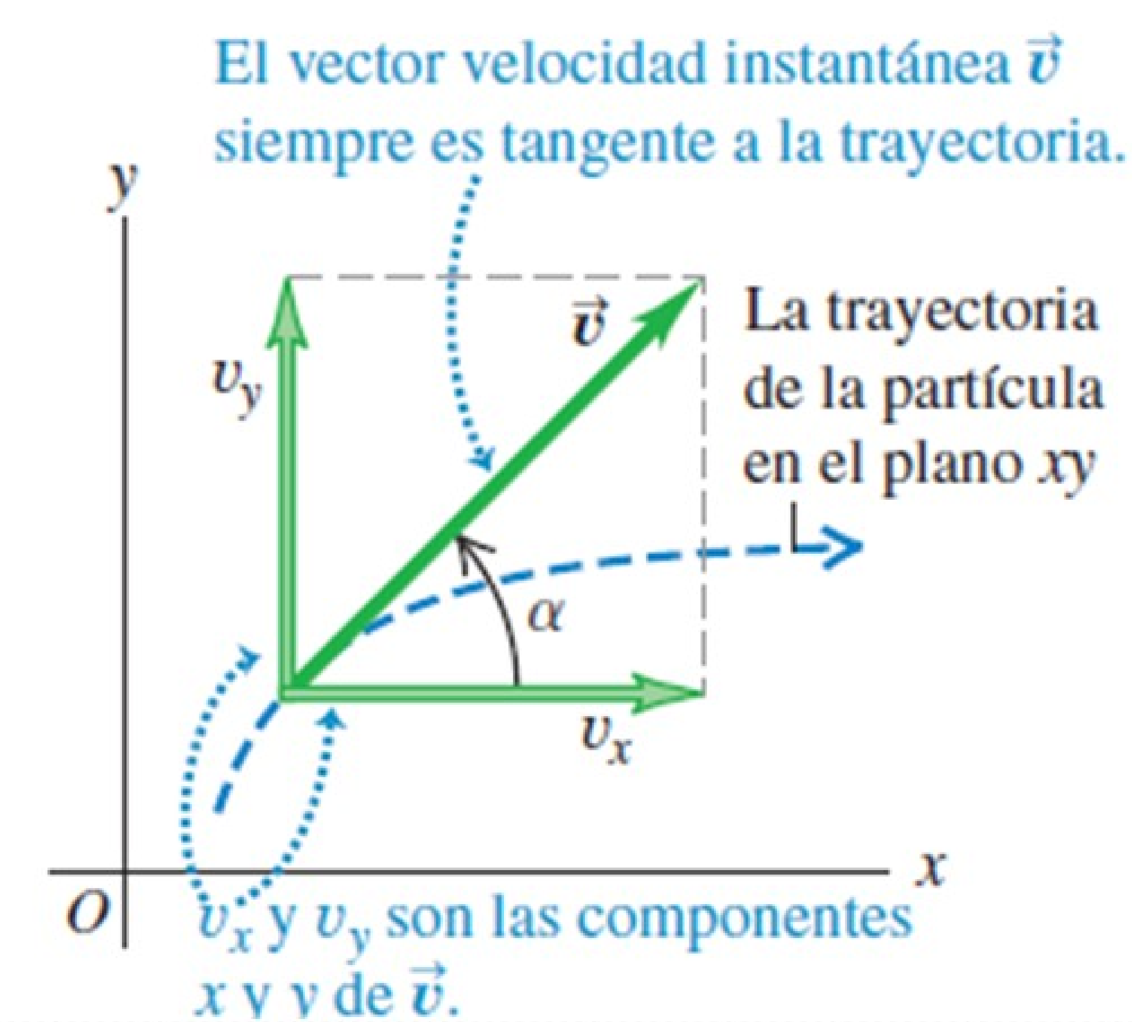
$$\overline{\boldsymbol{v}} = v_x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + v_z\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

El cualquier punto de la trayectoria, el vector es tangente a la trayectoria en ese punto, y el sentido es el del movimiento.

El módulo de $\overline{\boldsymbol{v}}$ es la **rapidez.**

$$|\overline{\boldsymbol{v}}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD



En dos dimensiones:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

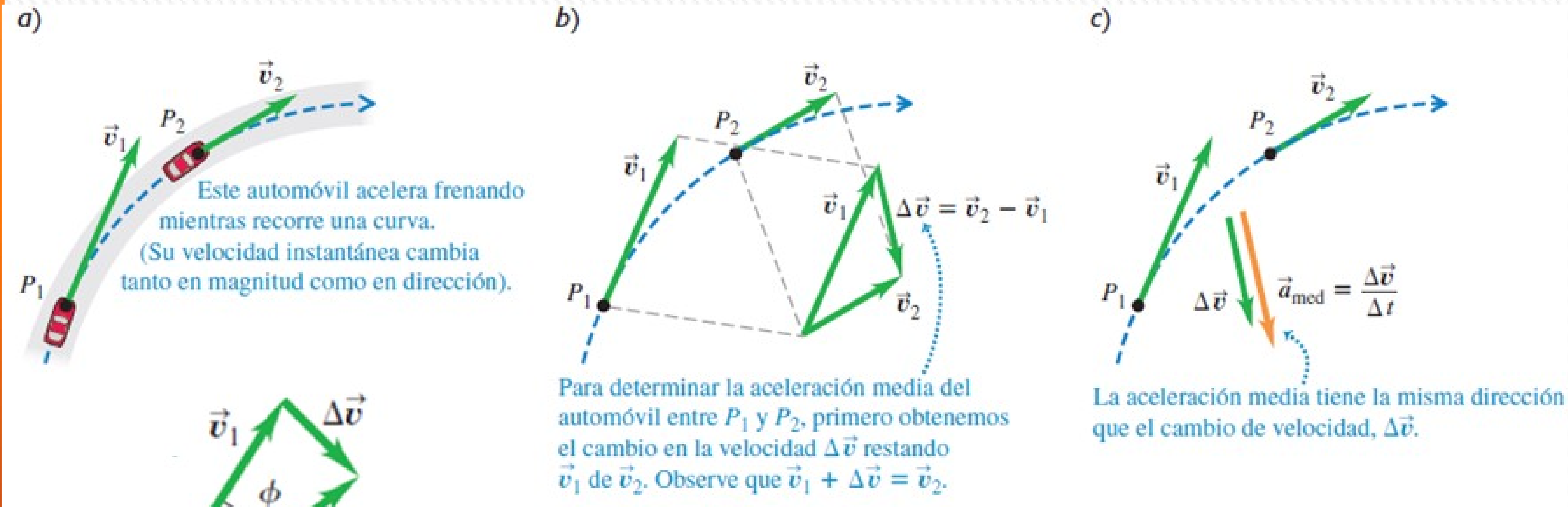
La dirección de la velocidad instantánea está dada por el ángulo α

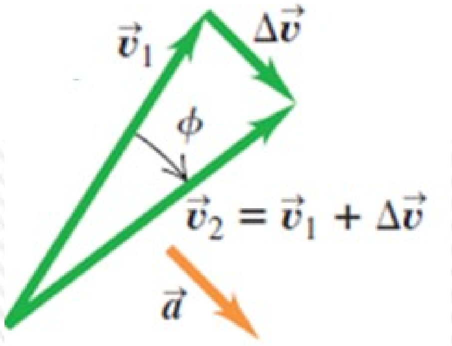
$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

VECTOR ACELERACIÓN

***La aceleración* describe cómo cambia la velocidad.**

Velocidad como vector: aceleración describe cambios *tanto en la magnitud de la velocidad (es decir,* la rapidez) *como en la dirección de la velocidad (la dirección en que se mueve* la partícula).

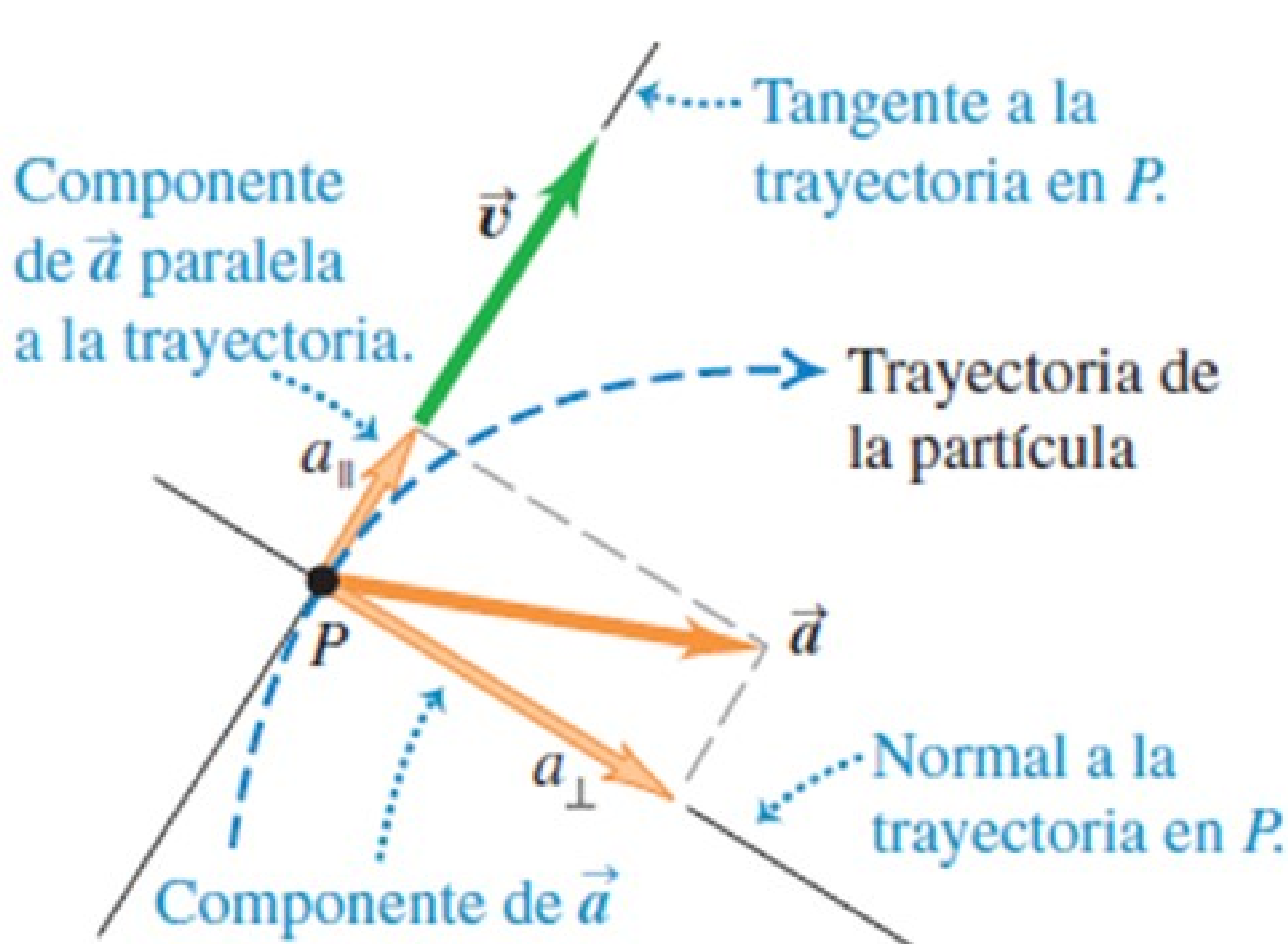




$$\bar{a}_{med} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Definimos la **aceleración media**:

COMPONENTES PERPENDICULAR Y PARALELA DE LA ACELERACIÓN

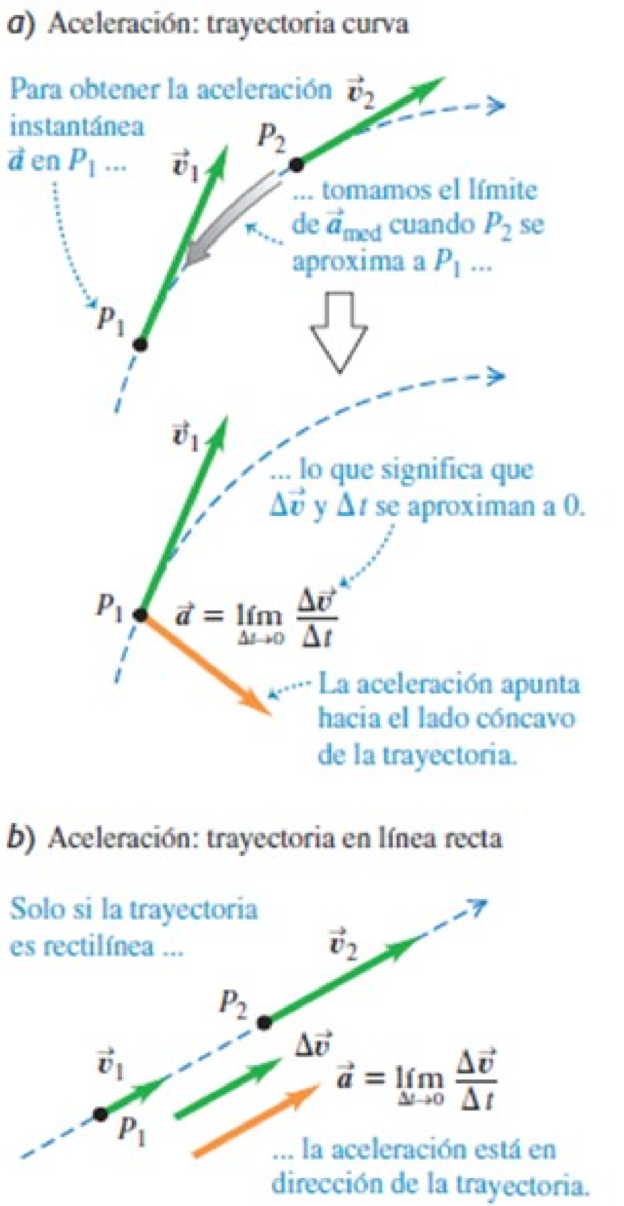


El vector $\overline{a}$ se puede visualizar en términos de una ***componente paralela a la trayectoria* de la *partícula* (paralela a la velocidad)**, y otra ***componente perpendicular a la trayectoria***, (perpendicular a la velocidad).

La **componente paralela** determina los **cambios en la *rapidez*** *de la partícula.*

La **componente perpendicular** indica los **cambios en la *dirección del movimiento*** de la partícula.

VECTOR ACELERACIÓN



Definimos **aceleración instantánea**:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

$$\bar{a} = \frac{dv_x}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\hat{k}$$

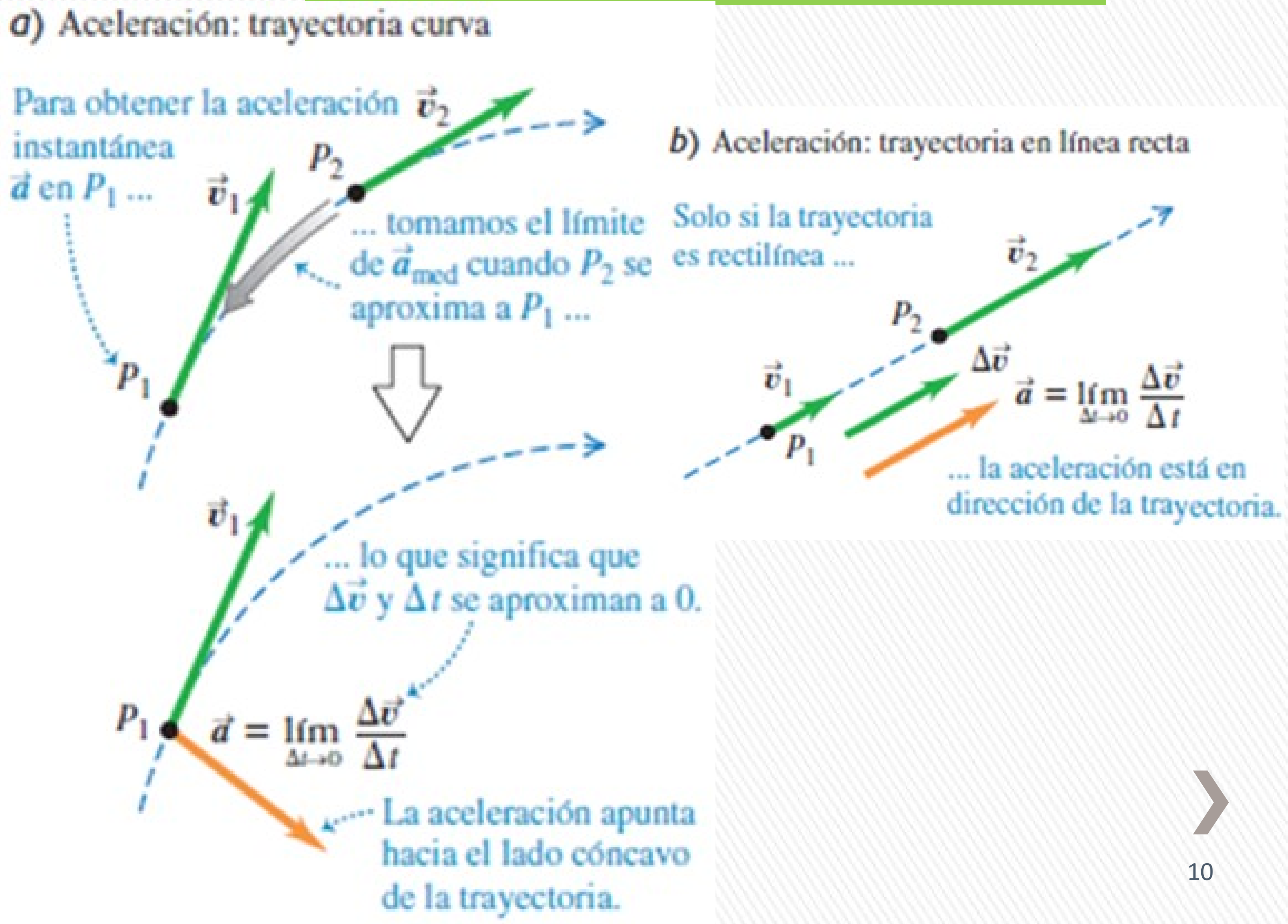
El vector **a** no *tiene que ser tangente a la trayectoria.*

Si la trayectoria es curva, apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria (interior de la curva descrita por la partícula).

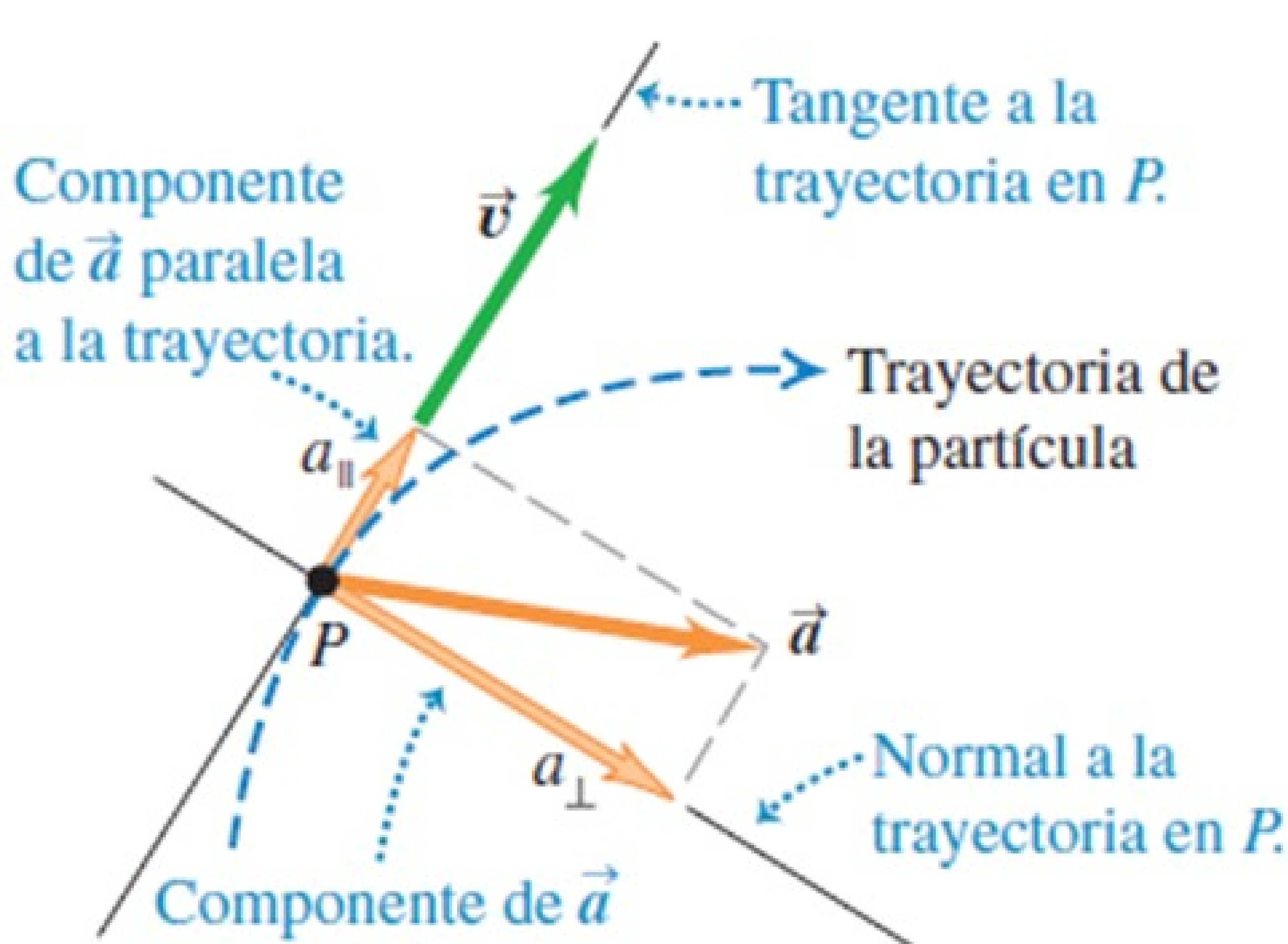
La aceleración es tangente a la trayectoria solo si la partícula se mueve en línea recta.

Atención: Cualquier partícula que sigue una trayectoria curva está acelerando !!!

VECTOR ACELERACIÓN



COMPONENTES PERPENDICULAR Y PARALELA DE LA ACELERACIÓN

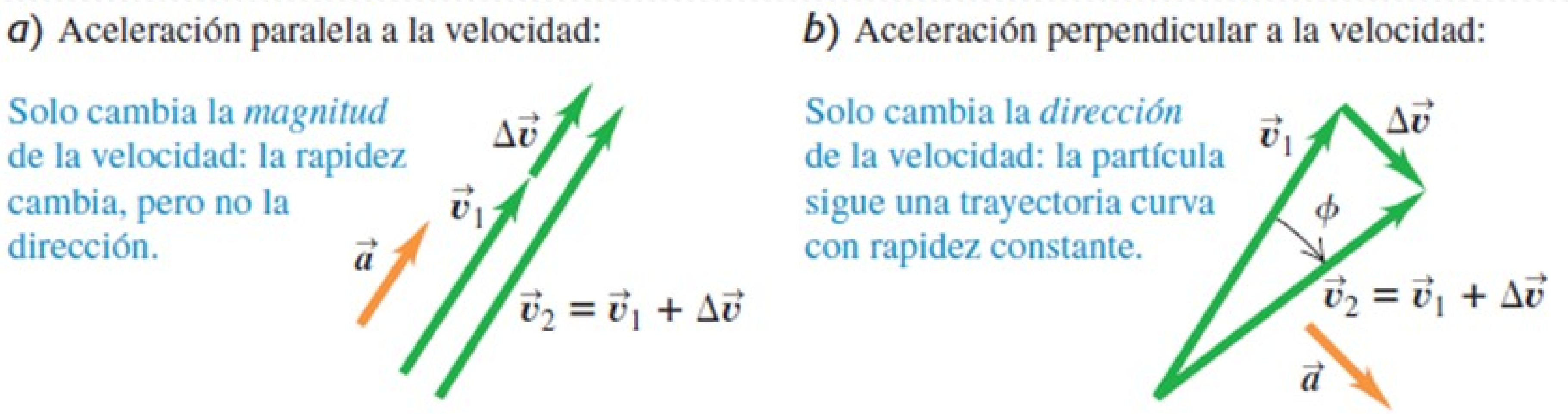


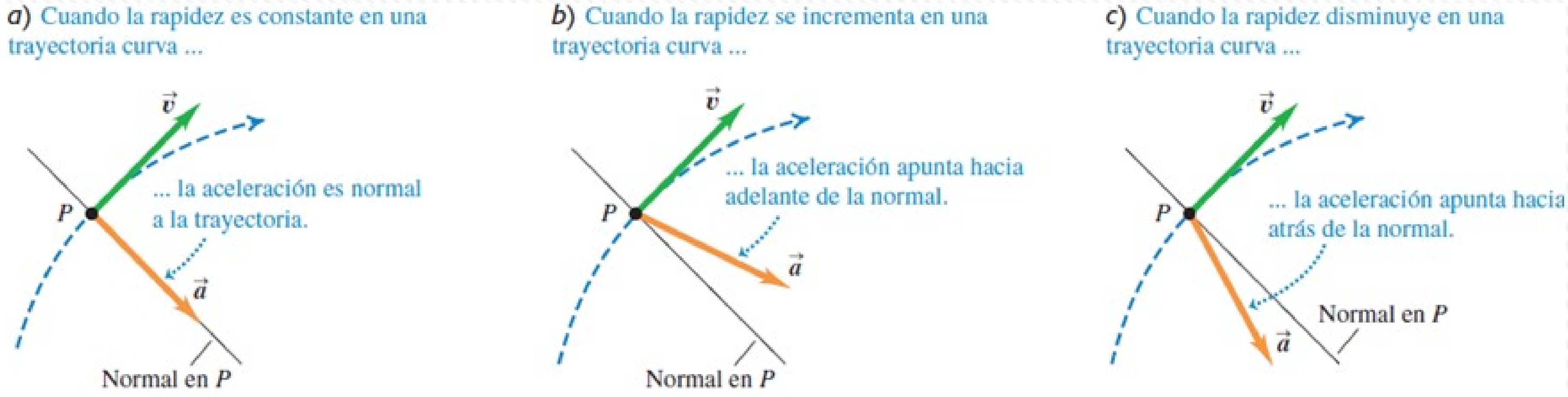
El vector $\overline{a}$ se puede visualizar en términos de una **componente *paralela a la trayectoria* de la *partícula* (paralela a la velocidad)**, y otra **componente *perpendicular a la trayectoria***, (perpendicular a la velocidad).

La **componente paralela** determina los **cambios en la *rapidez*** *de la partícula.*

La **componente perpendicular** indica los **cambios en la *dirección del movimiento*** de la partícula.

COMPONENTES PERPENDICULAR Y PARALELA DE LA ACELERACIÓN





Resumen: desplazamiento, velocidad y aceleración en dos dimensiones

El **desplazamiento** de un objeto se define como el cambio en su vector de posición:

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_f - \bar{r}_i$$

La **velocidad media** de un objeto durante un intervalo de tiempo Δ*t es su desplazamiento* dividido entre Δ*t :*

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$$

Como el desplazamiento es una cantidad vectorial y el intervalo de tiempo es una cantidad escalar, se concluye que la velocidad promedio es una cantidad *vectorial dirigida* a lo largo de $\Delta\bar{r}$

Cambio en el vector de posición de la partícula

Vector velocidad media de una partícula durante el intervalo de tiempo de t_1 a t_2.

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Posición final menos posición inicial

Intervalo de tiempo

Tiempo final menos tiempo inicial

Resumen: desplazamiento, velocidad y aceleración en dos dimensiones

La **velocidad instantánea** de un objeto es el límite de su velocidad media cuando Δ*t* *tiende a cero.*

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

El vector velocidad instantánea de una partícula ...

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

... es igual al límite de su velocidad media cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero ...

... y es igual a la razón de cambio instantánea de su vector de posición.

La dirección del vector velocidad instantánea es el recorrido a lo largo de la línea tangente a la trayectoria del objeto y con el sentido de su movimiento. Obviamente las unidades de estas velocidades vectoriales en el S.I. son m/s.

La **aceleración media** de un objeto durante un intervalo de tiempo Δ*t es el cambio de velocidad* Δ**v** dividido entre Δ*t* :

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}_f - \bar{v}_i}{\Delta t}$$

Cambio en la velocidad de la partícula

Vector aceleración media de una partícula durante el intervalo de tiempo de t_1 a t_2

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Velocidad final menos la velocidad inicial

Intervalo de tiempo

Tiempo final menos tiempo inicial

Resumen: desplazamiento, velocidad y aceleración en dos dimensiones

La **aceleración instantánea** de un objeto es el límite de su aceleración media cuando Δt *tiende a cero.*

$$\bar{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

El vector aceleración instantánea de una partícula ...

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

... es igual al límite de este vector aceleración media cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero ...

... y es igual a la razón de cambio instantánea de su vector velocidad.

ATENCIÓN:

Es importante reconocer que un objeto puede acelerar en diferentes formas:

1) La magnitud del vector velocidad (la rapidez) puede cambiar con el tiempo.

2) La dirección del vector velocidad puede cambiar con el tiempo, incluso si la rapidez es constante, como puede suceder a lo largo de una trayectoria curva.

3) Tanto la magnitud y la dirección del vector velocidad pueden cambiar al mismo tiempo.

Preguntas

¿En cuál de las siguientes situaciones el vector velocidad media $\boldsymbol{v}_{\text{med}}$ en un intervalo *sería igual a la velocidad* instantánea ***v** al final del intervalo?*

i. n cuerpo que se mueve en una trayectoria curva a rapidez constante;

ii. un cuerpo que se mueve en una trayectoria curva y aumenta su rapidez;

iii. un cuerpo que se mueve en línea recta a rapidez constante;

iv. un cuerpo que se mueve en línea recta y aumenta su rapidez

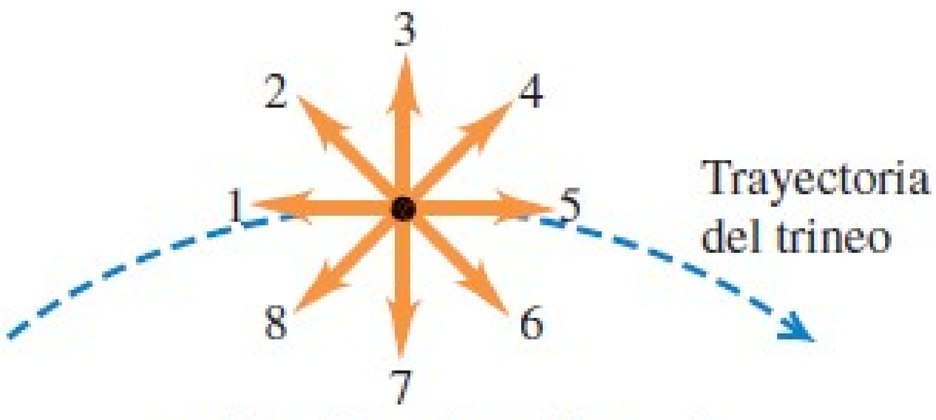
iii. Si la velocidad instantánea *v es constante durante un intervalo,* su valor en cualquier punto (incluyendo el final del intervalo) es igual a la velocidad media $\boldsymbol{v}_{\text{med}}$ durante el intervalo.

En **i y ii,** la dirección de ***v** al final del intervalo es tangente a la trayectoria en* ese punto; mientras que la dirección de $\boldsymbol{v}_{\text{med}}$ apunta del inicio de la trayectoria al final de la misma (en la dirección del desplazamiento neto).

En **iv, *v y*** $\boldsymbol{v}_{\text{med}}$ se encuentran a lo largo de la línea recta, aunque ***v** tiene una magnitud mayor porque la rapidez ha ido en aumento.*

Preguntas

Un trineo viaja por la cima de una colina cubierta de nieve. El trineo disminuye su rapidez conforme asciende por un lado de la colina y la aumenta cuando desciende por el otro lado.
¿Cuál de los vectores (1 a 9) en la figura muestra correctamente la dirección de la aceleración del trineo en la cima?
(Considere el 9 como la aceleración cero).



o bien, 9: aceleración = 0

3.2 Vector 7 En el punto más alto de la trayectoria del trineo, la rapidez es mínima. En ese punto, la rapidez no aumenta ni disminuye, y la componente paralela de la aceleración (es decir, la componente horizontal) es cero. La aceleración sólo tiene una componente perpendicular hacia el interior de la trayectoria curva del trineo. En otras palabras, la aceleración es hacia abajo