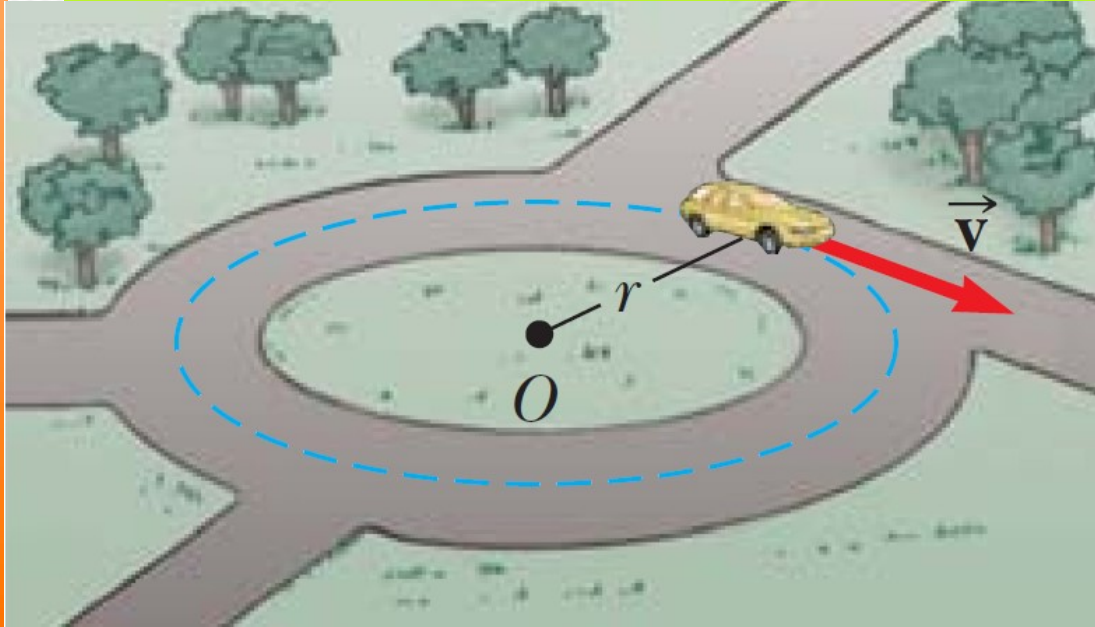


# 13- Movimiento circular, rotación de un rígido y aplicaciones de las leyes de Newton

Movimiento circular, rotación de un rígido y otras aplicaciones de las leyes de Newton:  
La segunda ley aplicada al movimiento circular, Aceleración angular y momento de inercia



# MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME



La figura muestra un automóvil que se mueve en una trayectoria circular con *rapidez constante*  $v$ . Este movimiento, es un **movimiento circular uniforme**. Como es tan común, este tipo de movimiento se reconoce como un modelo de análisis llamado **movimiento circular uniforme (MCU)**.

De acuerdo a la definición de **aceleración**, ésta depende del **cambio en la velocidad**, y como la velocidad es una cantidad vectorial, puede ocurrir en dos formas: por un **cambio en la magnitud de la velocidad** y por un **cambio en la dirección de la velocidad**.

*La última situación ocurre para un objeto que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular.*

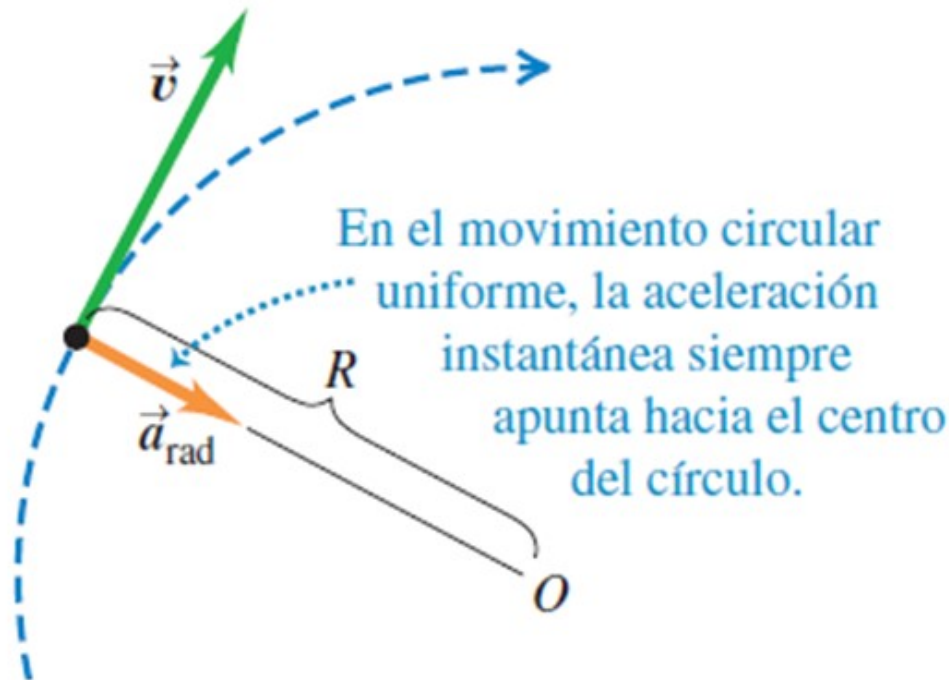
El vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria del objeto y perpendicular al radio de la trayectoria circular.



# MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Veamos que el vector aceleración en MCU siempre es perpendicular a la trayectoria y siempre apunta hacia el centro del círculo.

Si eso no fuera cierto, habría una componente de la aceleración paralela a la trayectoria y, debido a eso, paralela al vector velocidad. Esta componente conduciría a un cambio en la rapidez de la partícula a lo largo de la trayectoria, lo cual es inconsistente con que el móvil (que supondremos simplemente como una partícula) se mueve con rapidez constante a lo largo de la trayectoria.

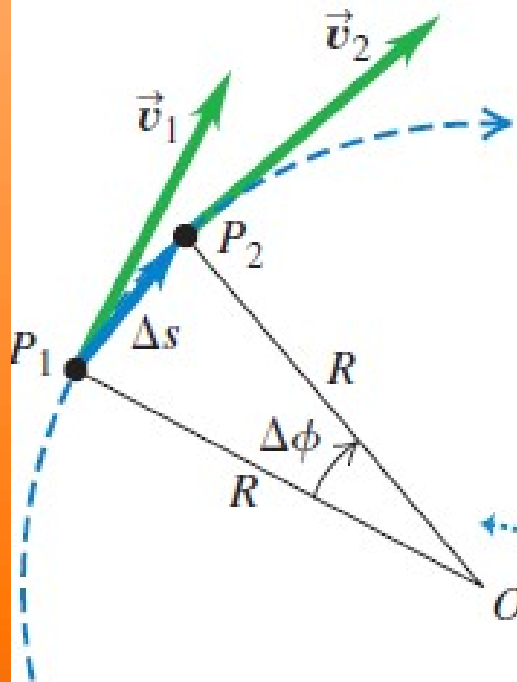


Ergo en un MCU, el vector aceleración sólo puede tener una componente perpendicular a la trayectoria, que es hacia el centro del círculo.

En un MCU: la partícula se mueve en un círculo con *rapidez constante* y el vector aceleración es perpendicular a la trayectoria y se dirige al centro de la trayectoria circular: **aceleración centrípeta**.



# MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME



La partícula se mueve de  $P_1$  a  $P_2$  en  $\Delta t$ , siendo las velocidades  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  respectivamente

$$\Delta \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_2 - \bar{\mathbf{v}}_1$$

Observar que:  $\bar{\mathbf{v}}_1 + \Delta \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_2$

Por perpendicularidad, los triángulos señalados son semejantes:

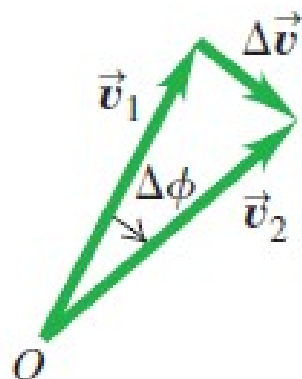
$$\frac{\Delta v}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \rightarrow \Delta v = \frac{v_1}{R} \Delta s$$

El módulo de la aceleración media vale:

$$a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

b) El cambio correspondiente en velocidad y aceleración media



Estos dos triángulos son semejantes.

Por tanto la aceleración (que es radial) vale:

$$a = a_{radial} = \frac{v^2}{R}$$

# MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

$a = a_{\text{radial}} = \frac{v^2}{R}$  La aceleración en el movimiento circular uniforme siempre apunta al centro del círculo y se le llama **aceleración centrípeta**.

*En el movimiento circular uniforme, la magnitud  $a_{\text{rad}}$  de la aceleración instantánea es igual al cuadrado de la rapidez  $v$  dividido entre el radio  $R$  del círculo; su dirección es radial y apunta hacia adentro sobre el radio*

Se puede expresar la magnitud de la aceleración en el movimiento circular uniforme en términos del **periodo  $T$  del movimiento**, es decir, el tiempo que dura una revolución (una vuelta completa alrededor del círculo).

En un tiempo  $T$ , la partícula recorre una distancia igual a la circunferencia  $2\pi R$ , así que su rapidez es:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$a = a_{\text{radial}} = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{R} \left( \frac{2\pi R}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$



# MOVIMIENTO CIRCULAR NO UNIFORME

Trayectoria circular y la rapidez varía.

La **aceleración radial** sigue valiendo lo mismo que en el uniforme, y *siempre es perpendicular* a la velocidad instantánea y dirigida al centro del círculo.

*Su valor  $a_{rad}$  no es constante. La aceleración radial (centrípeta) es mayor en el punto del círculo donde la rapidez es mayor.*

La aceleración tiene también una componente de aceleración *paralela a la velocidad instantánea* ( $a_{tan}$ )

La componente de **aceleración tangencial**  $a_{tan}$  es igual a la tasa de cambio de la *rapidez*

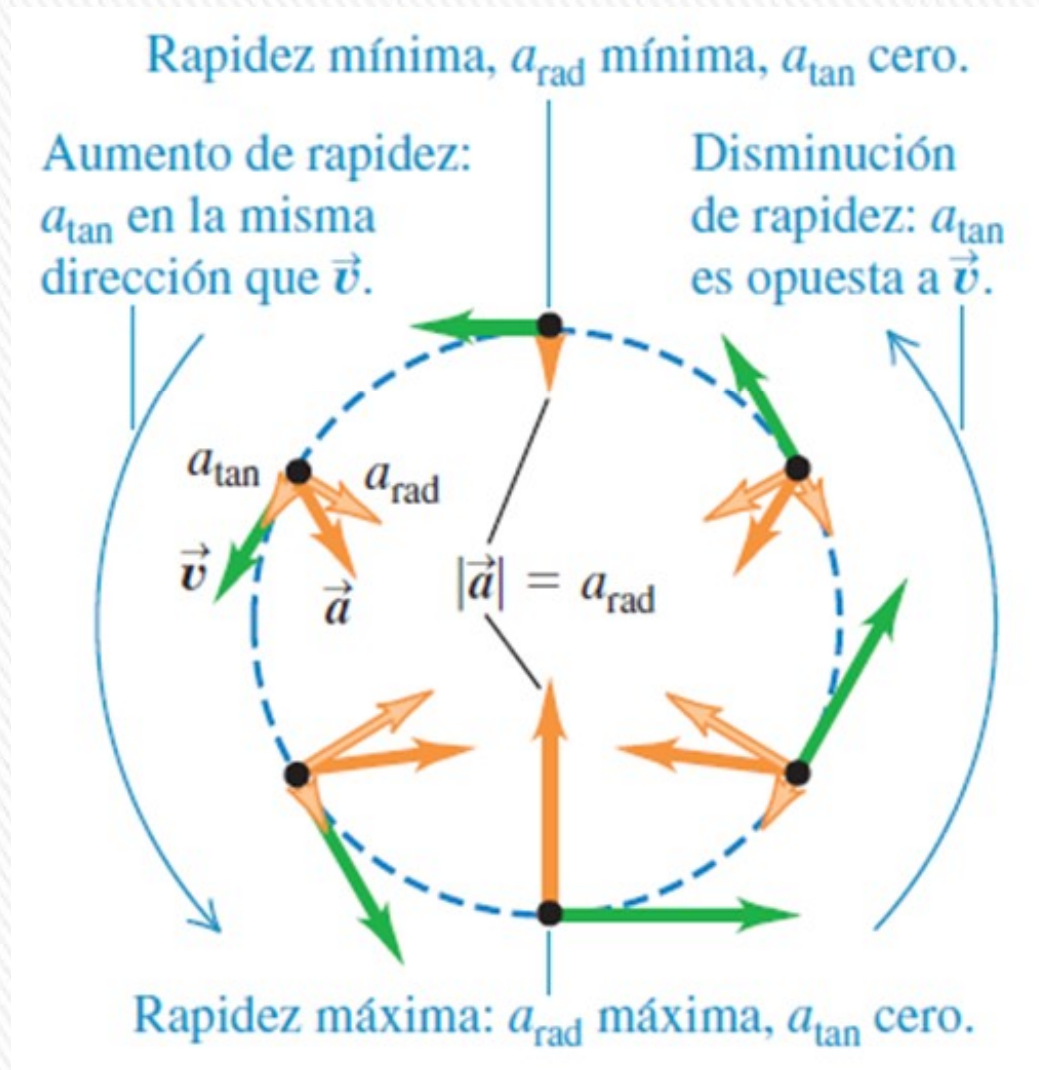
$$a_{radial} = \frac{v^2}{R} \quad a_{tangencial} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

La componente tangencial tiene el mismo sentido que la velocidad si la partícula está acelerando, y la dirección opuesta si está frenando.

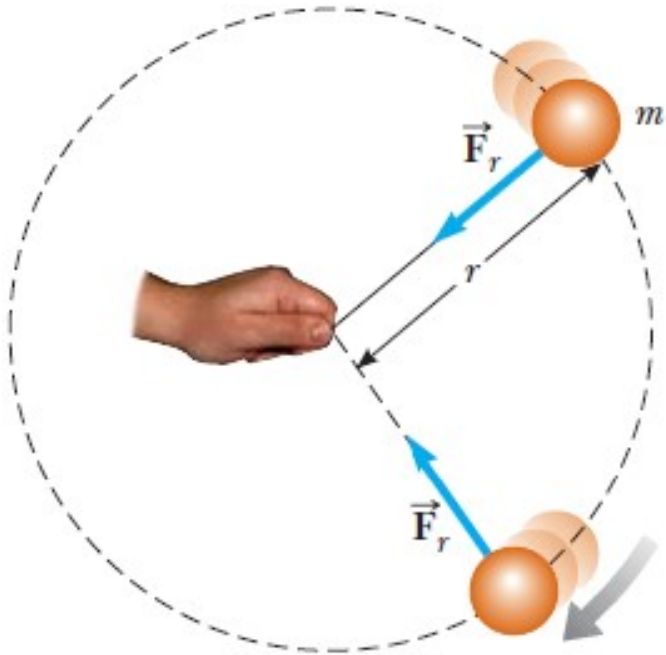


# MOVIMIENTO CIRCULAR NO UNIFORME

Movimiento de un carrito de montaña rusa con rapidez variable (se modela como partícula que se mueve en círculo vertical)



# Segunda ley de Newton para una partícula en movimiento circular uniforme



Consideremos una bola de masa  $m$  que se ata a una cuerda de longitud  $r$  y se la hace girar con rapidez constante en una trayectoria circular horizontal, sobre una mesa sin fricción, como se muestra.

¿Por qué la bola se traslada en un círculo? De acuerdo con la primera ley de Newton, la bola se movería en una línea recta si no hubiese fuerza en ella; sin embargo, la cuerda evita el movimiento a lo largo de una línea recta al ejercer en la bola una fuerza radial  $\vec{F}_r$  que la hace seguir la trayectoria circular.

Esta fuerza se dirige a lo largo de la cuerda hacia el centro del círculo, como se muestra en la figura.

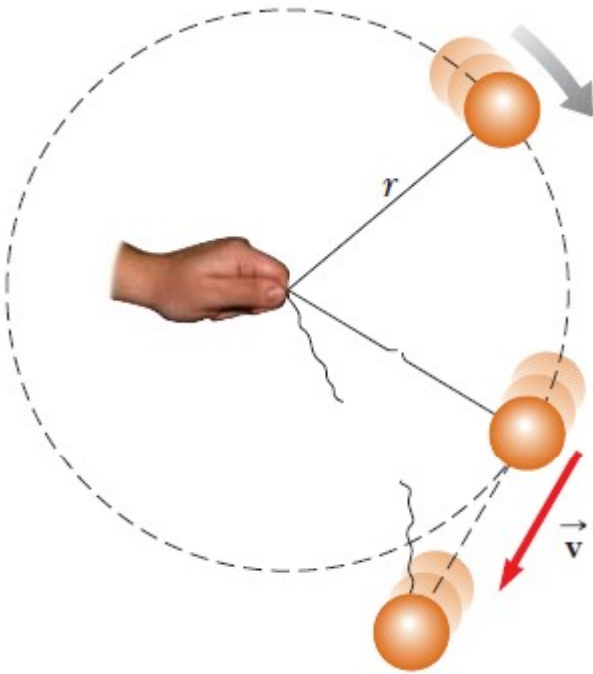
Si se aplica la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección radial, la fuerza neta que causa la aceleración centrípeta se relaciona con la aceleración así:

$$\sum F = ma_c = m \frac{v^2}{r}$$





# Segunda ley de Newton para una partícula en movimiento circular uniforme



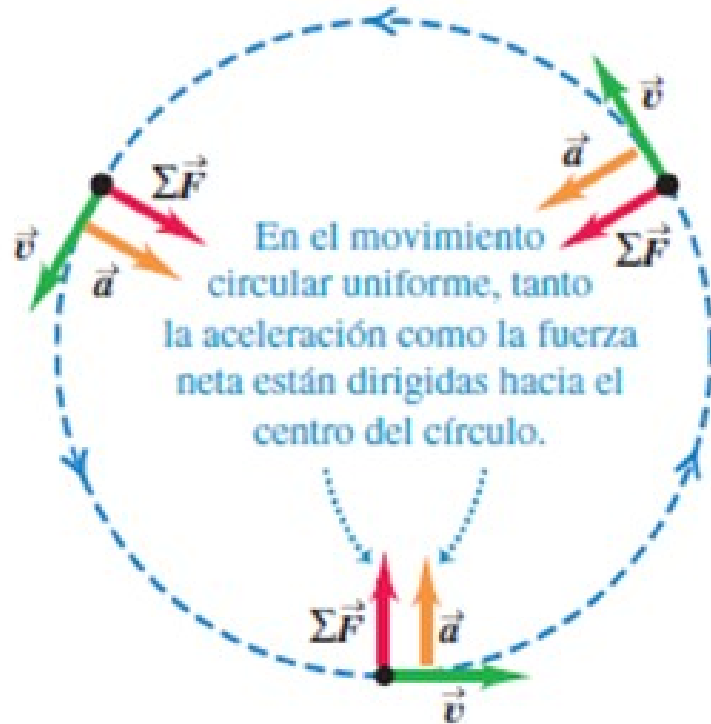
La fuerza que causa la aceleración centrípeta (la tensión de la cuerda) actúa hacia el centro de la trayectoria circular y genera un cambio en la dirección del vector velocidad.

Si esa fuerza desapareciera, por ejemplo si se rompiera la cuerda, el objeto ya no se movería en su trayectoria circular, se movería a lo largo de una trayectoria en línea recta tangente al círculo, como se muestra en la figura.

Si la cuerda se rompe en algún instante, la bola se mueve a lo largo de la trayectoria en línea recta que es tangente al círculo en la posición de la bola en ese instante.



# DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR



Cuando una partícula se mueve en un círculo con rapidez constante, su aceleración siempre es hacia el centro del círculo (perpendicular a la velocidad instantánea).

La magnitud  $a_{\text{rad}}$  de la aceleración es constante y está dada en términos de la rapidez  $v$  y el radio  $R$  del círculo por

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \quad (\text{movimiento circular uniforme})$$

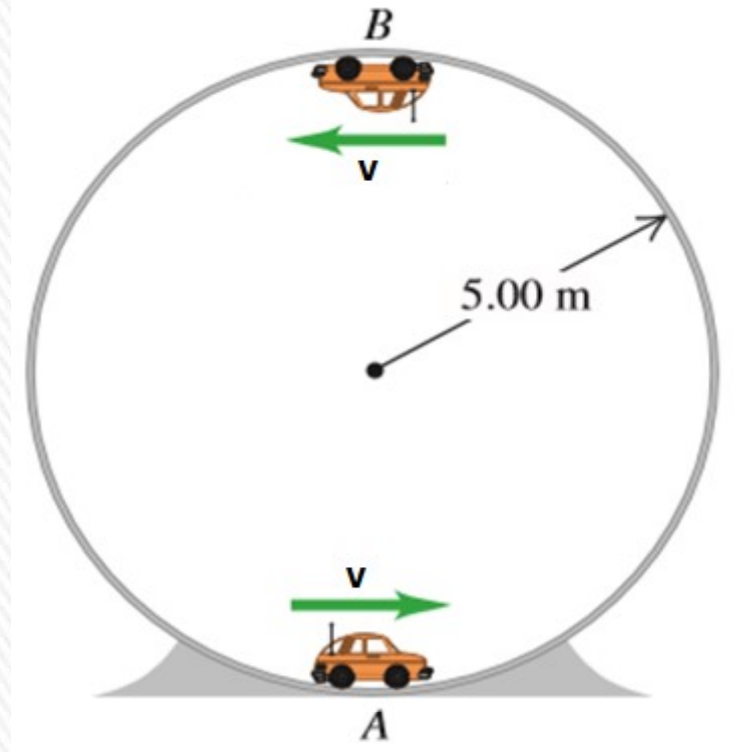
2da. Ley de Newton aplicada a la dirección radial en un movimiento circular uniforme:

$$F_{\text{neta}} = ma_{\text{rad}} = m \frac{v^2}{R}$$



## Ejemplo

Un carrito con masa de 0,800 kg viaja con rapidez constante en el interior de una pista circular vertical de radio igual a 5,00m. Si la fuerza normal ejercida por la pista sobre el carrito cuando está en la parte superior de la pista (punto B) es de 6,00N, ¿cuál es la fuerza normal sobre el carrito cuando se encuentra en la parte inferior de la pista (punto A)?

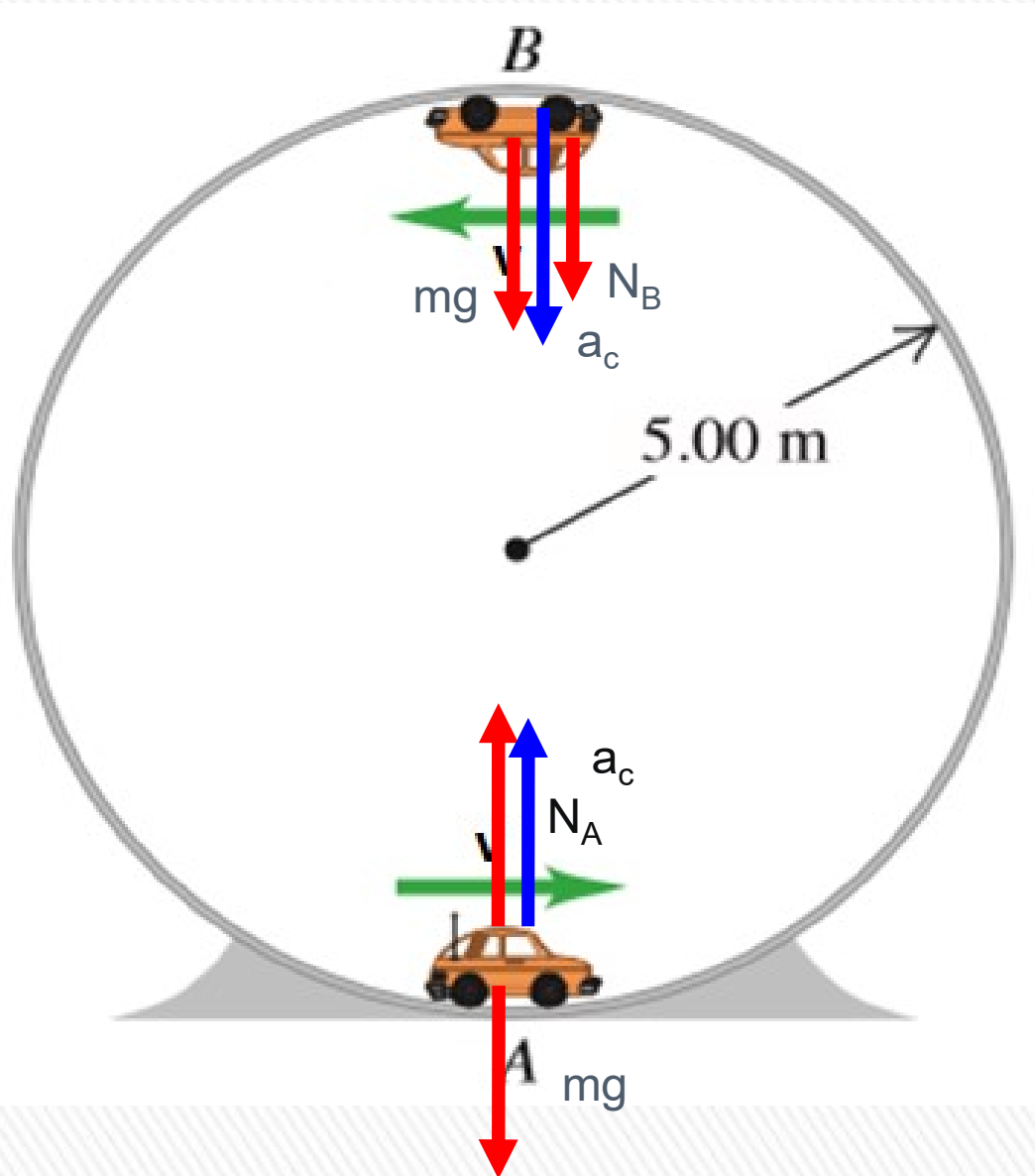


Como la rapidez es constante, la aceleración radial del carrito es constante, es la aceleración centrípeta.

Para calcular la normal en A ( $N_A$ ), debo aplicar la 2da. Ley de Newton en el punto A, y relacionar las fuerzas actuantes y la aceleración. Pero desconozco la aceleración...que depende la rapidez. Entonces debo plantear la 2da. Ley de Newton en el punto B... donde conozco cuánto vale la normal ( $N_A = 6,00 \text{ N}$ )



## Diagramas de cuerpo libre (DCL)



Vamos a representar los DCL en los puntos B y A

En B: actúan 2 fuerzas el peso del auto  $mg$  y la normal  $N_B$ , ambas dirigidas hacia el centro.

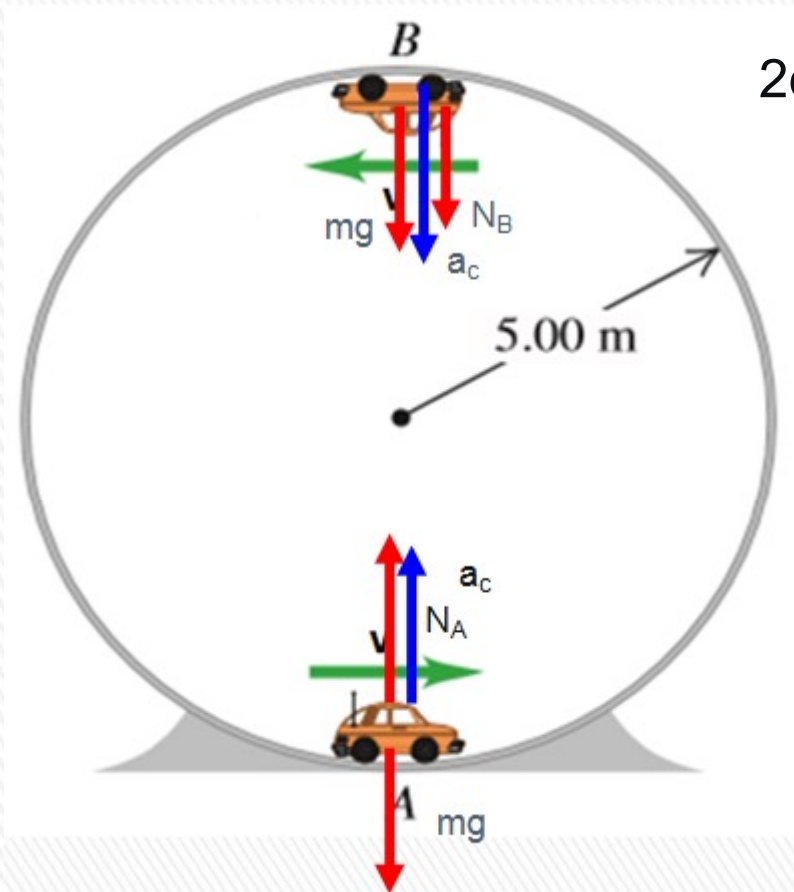
Además vamos a representar la aceleración centrípeta  $a_c$ , dirigida hacia el centro.

En A: actúan 2 fuerzas el peso del auto  $mg$  (hacia abajo) y la normal  $N_B$ , hacia arriba.

Incluimos además la aceleración centrípeta  $a_c$ , dirigida hacia el centro.

## Ejercicio 3.14

Diagramas de cuerpo libre (DCL)



$$\text{Aceleración centrípeta: } a = \frac{v^2}{R}$$

2da. Ley de Newton en B:  $ma = N_B + mg$

2da. Ley de Newton en A:  $ma = N_A - mg$

$$N_B + mg = N_A - mg$$

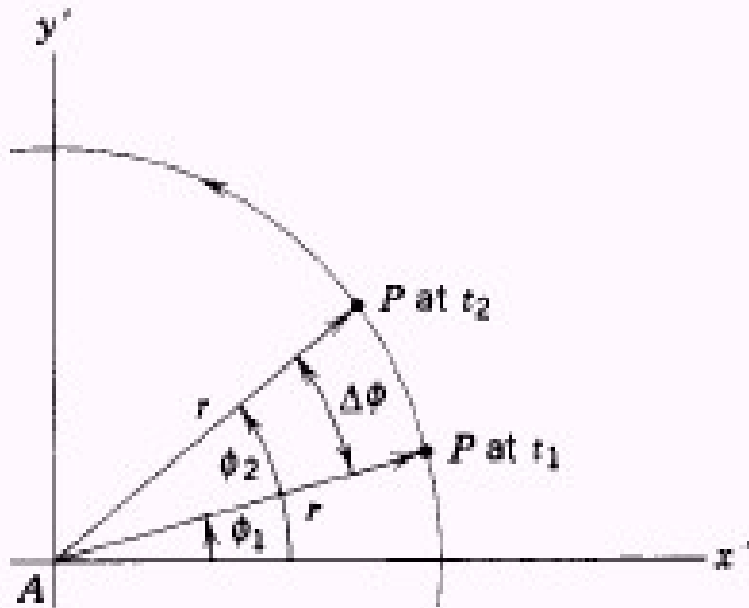
$$N_A = N_B + 2mg = 6,00 + 2(0,800) 9,8 =$$

$$N_A = 21,7 \text{ N}$$



# VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES

**Movimiento de rotación-** Rotación pura si cada punto del cuerpo rígido se mueve en trayectoria circular. Los centros de estos círculos están sobre una recta común (**eje de rotación**).



s es el arco y r es el radio de la cfa

## Variables de rotación-

**Ángulo  $\phi$** : posición angular de la línea de referencia AP (en radianes) y con sentido positivo de rotación antihorario.

$\phi$  está dado en radianes por la relación:

$$\phi = \frac{s}{r}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \cong 57,3^\circ$$

**Desplazamiento angular** de P será  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$



# VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES

**Velocidad angular media:**

$$\omega_{\text{media}} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

**Velocidad angular  $\omega$ :**

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}$$

**Aceleración angular media**

$$\alpha_{\text{media}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

**Aceleración angular ( $\alpha$ )**

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$1 \text{ rev/s} = 2\pi \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad 1 \text{ rev/min} = 1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$$

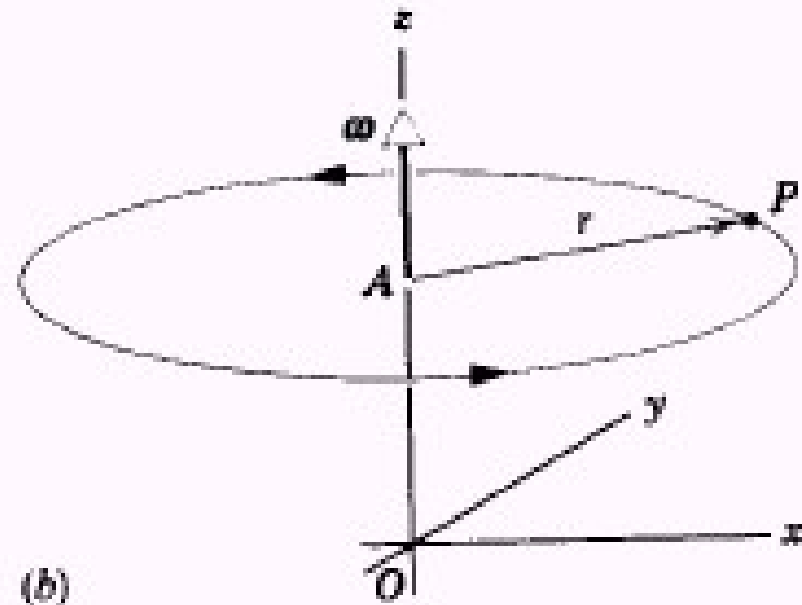
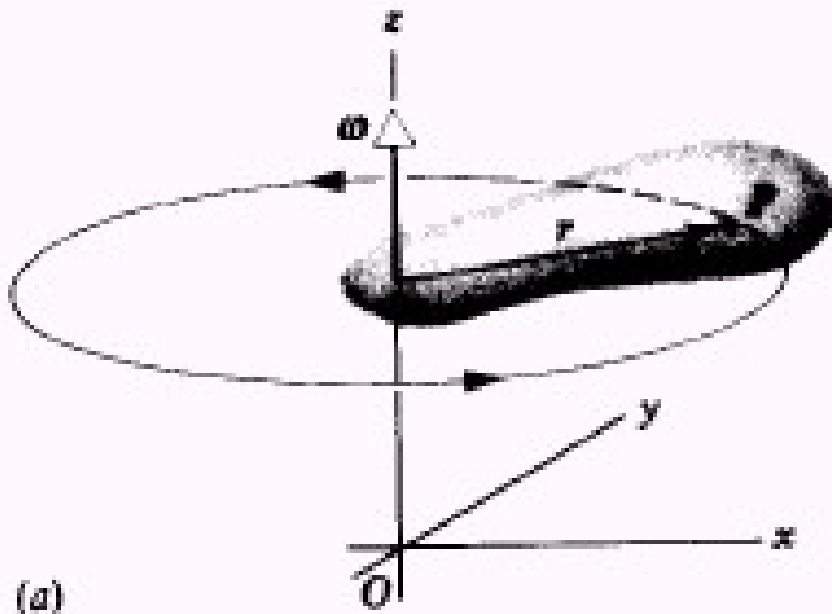
Velocidad angular positiva si el cuerpo gira en la dirección de  $\Phi$  creciente.

**Para un cuerpo rígido tanto  $\omega$  como  $\alpha$  son únicos (valen lo mismo para cada punto).**

# VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES COMO VECTORES

Las magnitudes angulares, también pueden representarse vectorialmente.

Se representan como vectores perpendiculares al plano de rotación, y con sentido dado por la regla de la mano derecha.

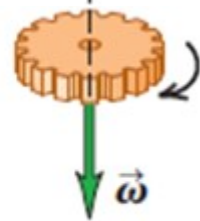
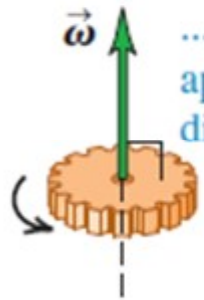


# VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES COMO VECTORES

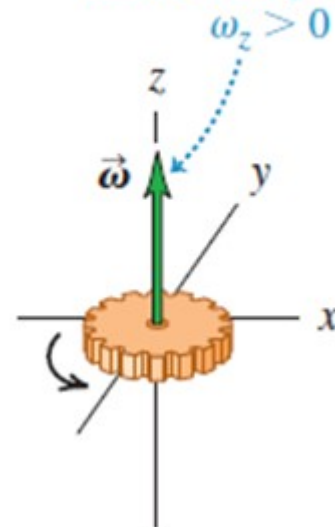
Si usted enrolla los dedos de su mano derecha en la dirección de la rotación ...



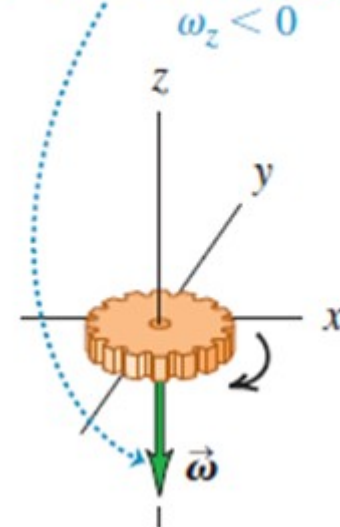
... el pulgar derecho apunta en la dirección de  $\vec{\omega}$ .



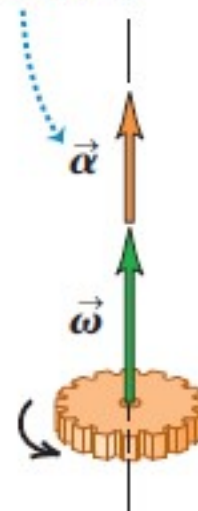
$\vec{\omega}$  apunta en la dirección  $z$  positiva:



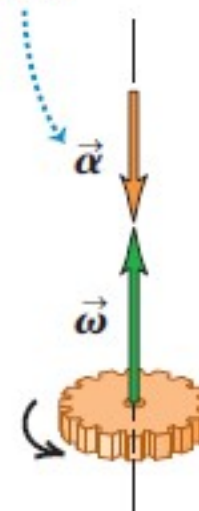
$\vec{\omega}$  apunta en la dirección  $z$  negativa:



$\vec{\alpha}$  y  $\vec{\omega}$  en la misma dirección: la rotación se acelera.



$\vec{\alpha}$  y  $\vec{\omega}$  en la dirección contraria: la rotación se frena.





# Rotación con aceleración angular constante

Las ecuaciones resultan ser similares a las ecuaciones vistas anteriormente para MRUA si sustituimos  $x$  por  $\theta$ ,  $v_x$  por  $\omega_z$ , y  $a_x$  por  $\alpha_z$ .

Consideramos que la aceleración angular  $\alpha_z$  es constante

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t - 0} \quad \omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$$

$$\omega_{med\ z} = \frac{\omega_z + \omega_{0z}}{2} \quad \omega_{med-z} = \frac{\theta + \theta_0}{t - 0}$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t \quad \theta - \theta_0 = \frac{1}{2}[\omega_{0z} + (\omega_{0z} + \alpha_z t)]t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$$



# Rotación con aceleración angular constante

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$$

**Tabla 9.1** Comparación del movimiento lineal y angular con aceleración constante

Movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante

Rotación sobre un eje fijo con aceleración angular constante

$$a_x = \text{constante}$$

$$\alpha_z = \text{constante}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad (2.8)$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \quad (9.7)$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.12)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \quad (9.11)$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad (2.13)$$

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \quad (9.12)$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t \quad (2.14)$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t \quad (9.10)$$

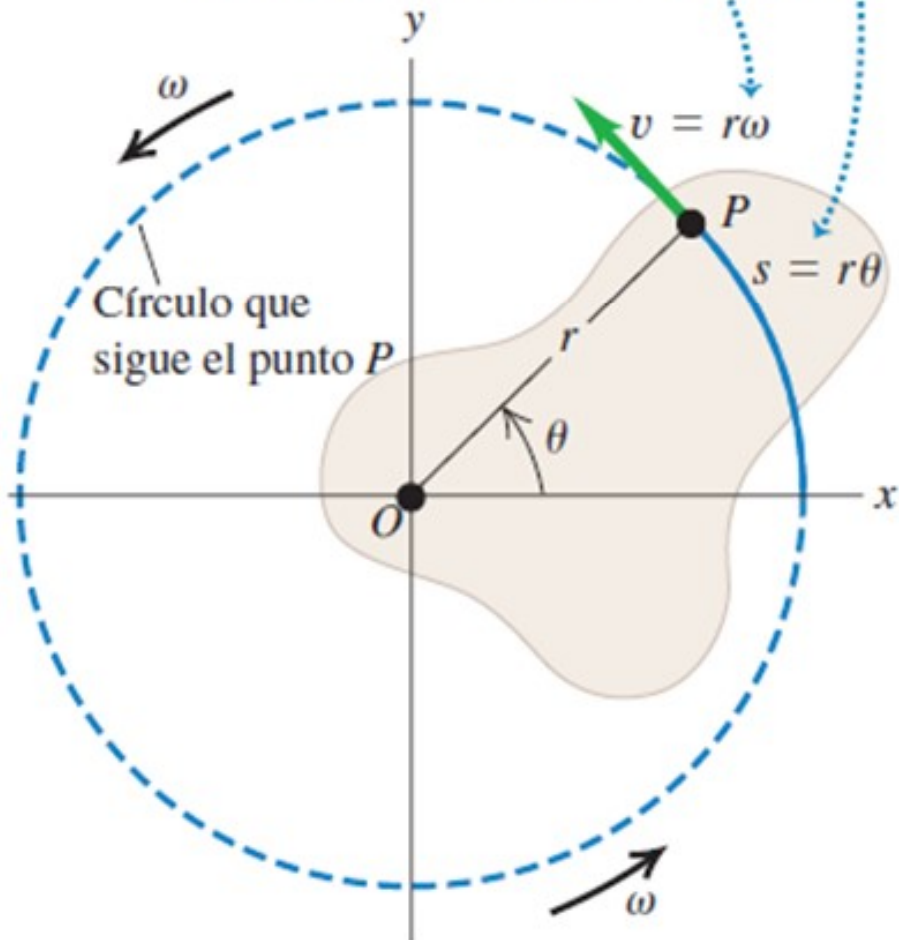




# Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Distancia que recorre el punto  $P$  del cuerpo (el ángulo  $\theta$  está en radianes)

Rapidez lineal del punto  $P$   
(la rapidez angular  $\omega$  está en rad/s)



Cuerpo rígido girando alrededor de un eje fijo que pasa por  $O$ .

Las partículas se mueven en una trayectoria circular, en un plano perpendicular al eje.

Punto  $P$  a una distancia constante  $r$  de  $O$ , describe círculo de radio  $r$ .

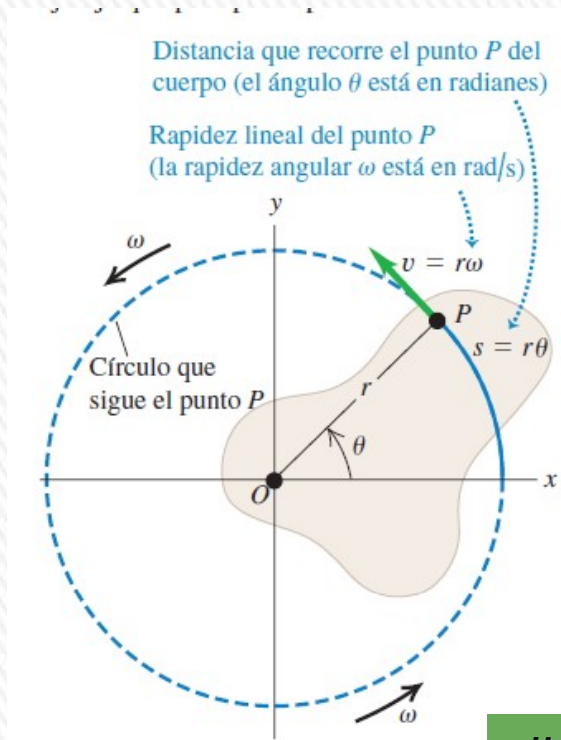
Ángulo  $\theta$  (en radianes) y la longitud del arco  $s$ :  $s = r \cdot \theta$

Derivando con respecto al tiempo ( $r$  es constante) y tomando el valor absoluto:

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = r \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$



# Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido



$$v = r \omega$$

$|ds/dt|$  valor absoluto de la tasa de cambio de la longitud de arco, igual a la **rapidez lineal instantánea  $v$  de la partícula.**

$|d\theta/dt|$  valor absoluto de la razón de cambio del ángulo, **rapidez angular instantánea  $\omega$**  (magnitud velocidad angular instantánea en rad/s)

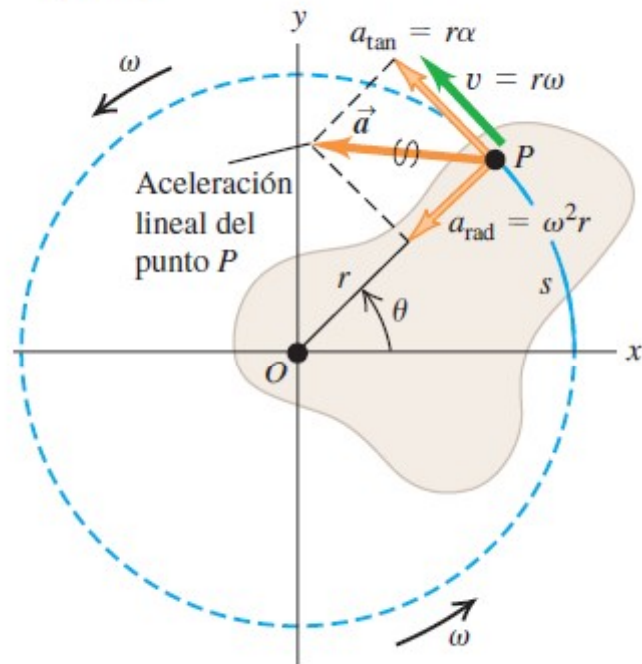
*dirección del vector  $v$ : tangente a la trayectoria circular en todos los puntos*

**Cada punto sobre el objeto rígido tiene la misma rapidez angular, pero no todo punto tiene la misma rapidez tangencial porque  $r$  no es el mismo para todos los puntos sobre el objeto.**

# Aceleración lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Componentes de aceleración radial y tangencial:

- $a_{\text{rad}} = \omega^2 r$  es la aceleración centrípeta del punto  $P$ .
- $a_{\text{tan}} = r\alpha$  significa que la rotación de  $P$  está aumentando (el cuerpo tiene aceleración angular).



Derivando respecto al tiempo:  $v = r \omega$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha_z$$

Se vio que un punto que se mueve en una trayectoria circular tiene una **aceleración radial  $a_r$  dirigida hacia el centro de rotación y cuya magnitud es la de la aceleración centrípeta  $v^2/r$** .

Como  $v = r \omega$ , la aceleración centrípeta en dicho punto se puede expresar en términos de rapidez angular

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r \omega^2$$

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{(r\alpha_z)^2 + (r\omega^2)^2} = r\sqrt{\alpha_z^2 + \omega^4}$$



## PREGUNTAS RÁPIDAS

Nadia y Teo viajan en una calesita. Nadia viaja en un caballo en el borde exterior de la plataforma circular, al doble de distancia del centro de la plataforma circular que Teo, quien viaja en un caballo interior.

i) **Cuando la calesita en rotación** a una rapidez angular constante, ¿cuál es la rapidez angular de Nadia?

- a) el doble de la de Teo.
- b) la misma que la de Teo,
- c) la mitad de la de Teo,
- d) imposible de determinar.

ii) **Cuando el carrusel en rotación con una rapidez angular constante**, describa la rapidez tangencial de Nadia con la misma lista de opciones.

- a) el doble de la de Teo,
- b) la misma que la de Teo,
- c) la mitad de la de Teo,
- d) imposible de determinar.

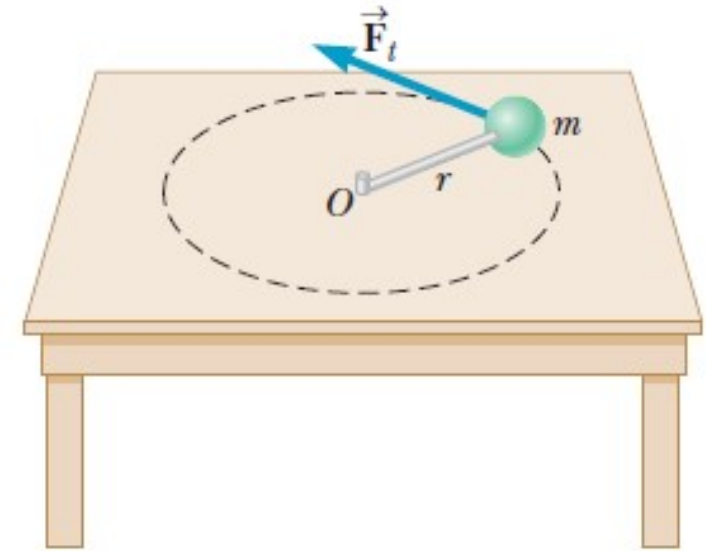




## Relación entre el torque y la aceleración angular

Veremos que cuando un objeto rígido está sujeto a un torque neto, experimenta una aceleración angular proporcional al torque neto, un resultado similar a la segunda ley de Newton, pero para rotaciones.

Sistema de la figura: objeto de masa  $m$  unido a una barra muy ligera de longitud  $r$ , que gira alrededor del punto  $O$  sobre una mesa horizontal sin fricción. Supongamos que una fuerza  $F_t$  actúa perpendicularmente a la barra (tangente a la trayectoria circular del objeto).



Debido a que no hay fuerza opuesta a la fuerza tangencial, el objeto experimenta una aceleración tangencial  $a_t$  de acuerdo con la segunda ley de Newton:  $m \cdot a_t = F_t$

Multiplicando ambos miembros por  $r$ :  $m \cdot a_t \cdot r = F_t \cdot r$

Y ahora, sustituyendo:  $a_t = \alpha \cdot r$  resulta:  $m \cdot \alpha \cdot r^2 = F_t \cdot r$

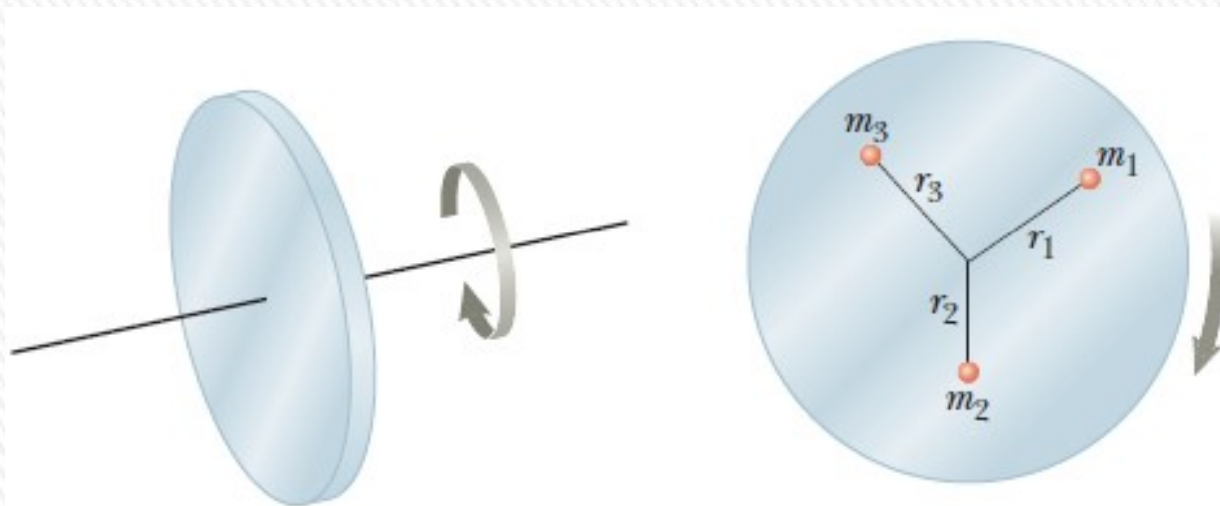
Pero el 2do. miembro es el torque que actúa sobre el objeto en relación con su eje de rotación, así que se puede describir como  $m \cdot \alpha \cdot r^2 = \tau$

# Relación entre el torque y la aceleración angular

$$m \cdot r^2 \alpha = \tau$$

$$I \cdot \alpha = \tau$$

Esta ecuación muestra que el torque ( $\tau$ ) sobre el objeto es proporcional a la aceleración angular ( $\alpha$ ) de éste, donde la constante de proporcionalidad  $mr^2$  se reconoce como el **momento de inercia ( $I$ )** del objeto de masa  $m$  con respecto al punto  $O$ . (Debido a que la barra es muy ligera, su momento de inercia puede despreciarse.)



Consideremos un disco sólido que rota sobre su eje como en la figura. El disco consiste en muchas partículas a varias distancias del eje de la rotación. El torque en cada una de estas partículas está dado por la ecuación anterior.

El torque *neto* sobre el disco está dado por la suma de los torques individuales  $\tau_i$  en todas las partículas, y etiquetando a c/u de las masas y a sus distancias con respecto al eje con un subíndice  $i$ :

$$\sum_i \tau_i = \left( \sum_i m_i \cdot r_i^2 \right) \alpha$$

Como el disco es rígido, todas sus partículas tienen la *misma aceleración angular*, así que  $\alpha$  no está involucrada en la suma.





## Relación entre el torque y la aceleración angular

$$\sum_i m_i \cdot r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots$$

Esta cantidad es el **momento de inercia,  $I$** , de todo el cuerpo:

El momento de inercia tiene unidades SI de  $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ .

Utilizando este resultado en la ecuación anterior, vemos que el torque neto sobre un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo está dado por:

Esta ecuación indica que **la aceleración angular de un objeto rígido es proporcional al torque neto que actúa sobre él**, y es el análogo rotatorio de la 2da. Ley de Newton.

$$\sum \tau = I\alpha$$

En esta ecuación el torque sustituyendo a la fuerza, el momento de inercia que sustituye a la masa y la aceleración angular, a la aceleración lineal.

Aunque el momento de inercia de un objeto se relaciona con su masa, hay una importante diferencia entre ellos. La masa  $m$  *depende solamente de la cantidad de materia en un objeto*, mientras que el momento de la inercia,  $I$ , *depende de la cantidad de materia y de su distribución* (con el término  $r^2$  en  $I = \sum mr^2$ ) en el objeto rígido.





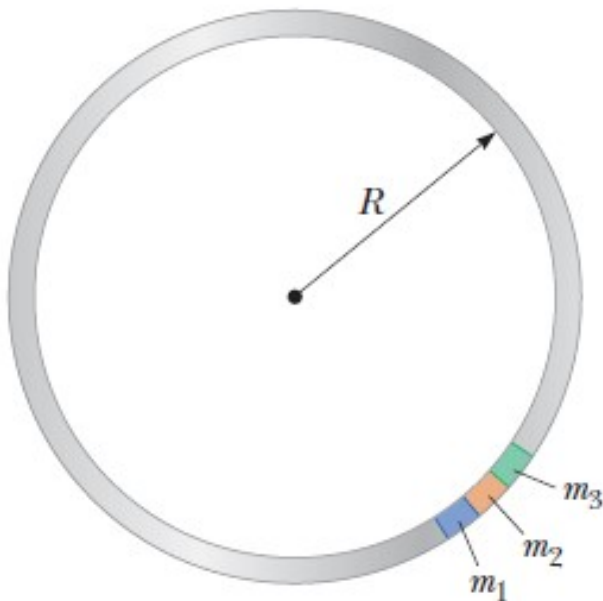
# Momento de inercia

Como vimos una partícula tiene un momento de inercia igual a  $mr^2$  en relación con un cierto eje.

El momento de inercia de un objeto compuesto sobre un cierto eje es justo la suma de los momentos de inercia de los componentes del objeto

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots$$

La masa es una característica intrínseca del objeto y que no cambia, mientras que **el momento de inercia de un sistema depende de cómo la masa se distribuye y de la ubicación del eje respecto al cual se calcula I.**



Cuando el objeto es extendido, como una esfera o un cilindro se requieren a menudo técnicas del cálculo, a menos que una cierta simetría esté presente.

Un objeto de solución simple es un aro que rota sobre un eje perpendicular a su plano y que pasa a través de su centro (como la rueda de una bicicleta). Para evaluar el momento de inercia del aro, podemos todavía utilizar la ecuación  $I = \sum mr^2$  e imaginarse que la masa del aro  $M$  está dividida en  $n$  pequeños segmentos de masas  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ , como se ve en la figura, con  $M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$ .

# Momento de inercia

Podemos expresar  $I$  como la suma: 
$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots + m_n r_n^2$$

Todos los segmentos alrededor del aro están a la *misma distancia*  $R$  del eje de rotación, así que podemos usar subíndices en las distancias y factorizar  $R^2$  para obtener

$$I = (m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n)R^2 = MR^2$$

Expresión que se puede usar para el momento de inercia de cualquier objeto de forma anular, que rota sobre un eje a través de su centro y perpendicular a su plano. Este resultado es estrictamente válido solamente si el grueso del anillo es pequeño en relación con su radio interno.

Desafortunadamente, para objetos más extensos el cálculo es más difícil porque no todos los elementos de masa están situados a la misma distancia del eje, por lo que se requieren los métodos del cálculo integral.

Los momentos de inercia para algunas otras formas comunes se muestran en la próxima diapositiva. Se puede utilizar esta tabla cuando necesite determinar el momento de inercia de un cuerpo que tiene las formas mencionadas.

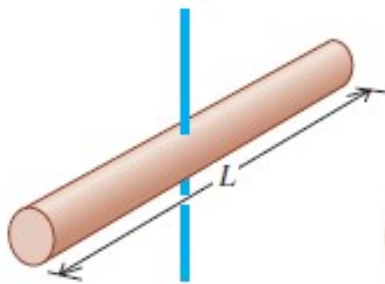




# Momentos de inercia de diversos cuerpos homogéneos

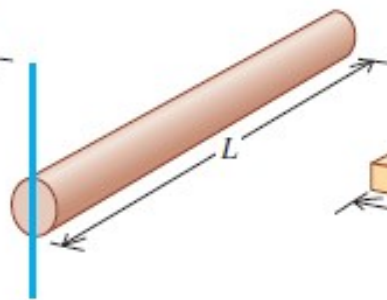
a) Varilla delgada, eje a través del centro

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$



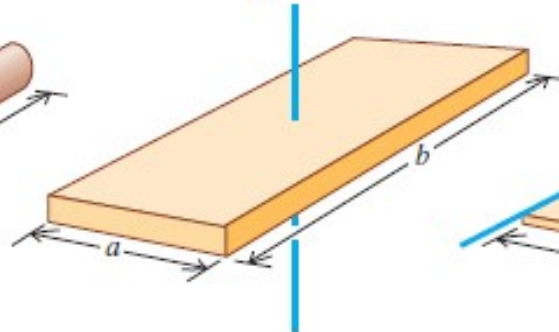
b) Varilla delgada, eje a través de un extremo

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



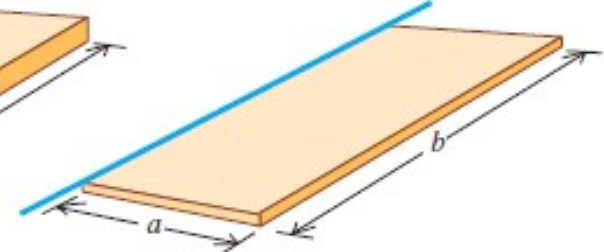
c) Placa rectangular, eje a través del centro

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$



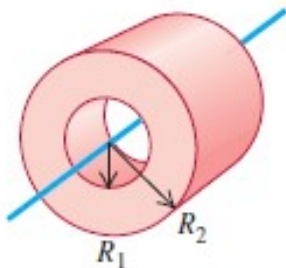
d) Placa rectangular delgada, eje a lo largo de un extremo

$$I = \frac{1}{3}Ma^2$$



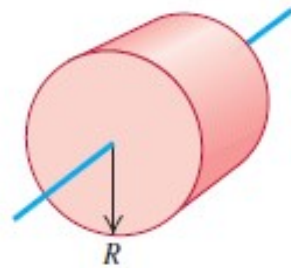
e) Cilindro hueco de pared gruesa

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$



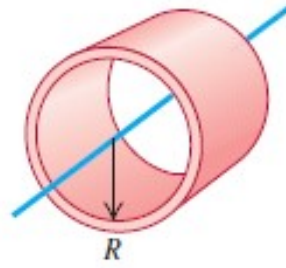
f) Cilindro sólido

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



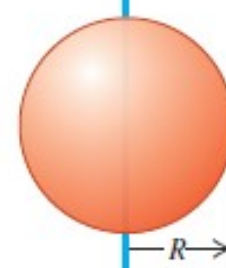
g) Cilindro hueco de pared delgada

$$I = MR^2$$



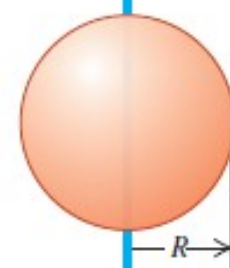
h) Esfera sólida

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$



i) Esfera hueca de pared delgada

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$





## Ejemplo: Descenso de un balde en un pozo

Un carrete sólido cilíndrico sin fricción, de masa  $M=3,00$  kg y radio  $R=0,400$  m, se usa para sacar agua de un pozo. Un balde de masa  $m= 2,00$  kg se ata a una cuerda ideal que se enrolla alrededor del cilindro.

- Encuentre la tensión  $T$  en la cuerda y la aceleración  $a$  del balde.
- Si el balde parte del reposo desde la boca del pozo y cae durante 3,00 s antes de golpear el agua, ¿qué distancia recorre en la caída?



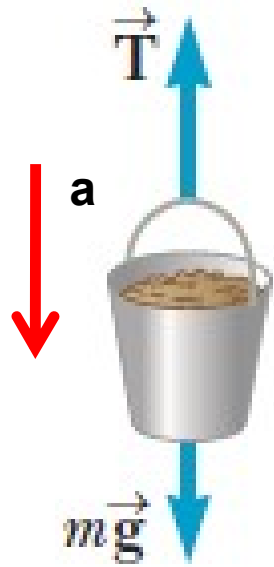
Este problema involucra tres incógnitas: la aceleración  $a$  del balde, la aceleración angular  $\alpha$  del cilindro y la tensión  $T$  en la cuerda, por lo que debemos establecer tres ecuaciones:

- la segunda ley de Newton aplicada al balde,  $ma = \Sigma F$ ;
- la versión rotatoria de la segunda ley aplicada al cilindro:  $I\alpha = \Sigma \tau$ , y
- la relación entre las aceleraciones lineal y angular,  $a = r\alpha$ , que conecta las dinámicas del balde y del cilindro.

El inciso b) es una revisión de cinemática.

Comencemos realizando los DCL del balde y del carrete

## Ejemplo: Descenso de un balde en un aljibe



Como el balde está cayendo, la aceleración  $a$  es hacia abajo.

Entonces voy a escribir la 2da. Ley de Newton, según el eje vertical, y considerando en sentido positivo hacia abajo:

$$m \cdot a = m \cdot g - T \quad (1)$$

El carrete se encuentra en equilibrio de traslación: la fuerza  $n$  equilibra la otras dos fuerzas actuantes: su peso  $Mg$  y la tensión  $T$  que le ejerce el balde a través de la cuerda.

Por tanto el carrete sólo puede rotar. Por lo que aplicamos *la versión rotatoria* de la segunda ley aplicada al cilindro:  $I\alpha = \Sigma\tau$

En este caso, la única fuerza que realiza torque, es la tensión  $T$  con un brazo de palanca igual a  $R$ :

$$I\alpha = T \cdot R$$

Ahora sustituimos:  $\alpha = a/R$  y el valor de  $I$  correspondiente a un cilindro macizo ( $MR^2/2$ )

$$\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{a}{R} = T \cdot R \quad \frac{1}{2}Ma = T \quad (2)$$

Sustituyen  $T$  en (1) y operando:

$$ma = mg - \frac{1}{2}Ma \quad \left(m + \frac{1}{2}M\right)a = mg \quad a = \frac{m}{m + \frac{1}{2}M}g$$



## Ejemplo: Descenso de un balde en un aljibe

$$a = \frac{m}{m + \frac{1}{2}M} g = \frac{2,00}{2,00 + \frac{1}{2}(3,00)} 9,80 = 5,60 \text{ m/s}^2$$

$$T = \frac{1}{2} M a = \frac{1}{2} (3,00)(5,60) = 8,40 \text{ N}$$

b) Para determinar el desplazamiento del balde al cabo de 3,00 segundos de caída, aplico la expresión del desplazamiento para una aceleración constante; teniendo en cuenta que la velocidad inicial es nula.

$$\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} (5.60 \text{ m/s}^2) (3.00 \text{ s})^2 = 25,2 \text{ m}$$

