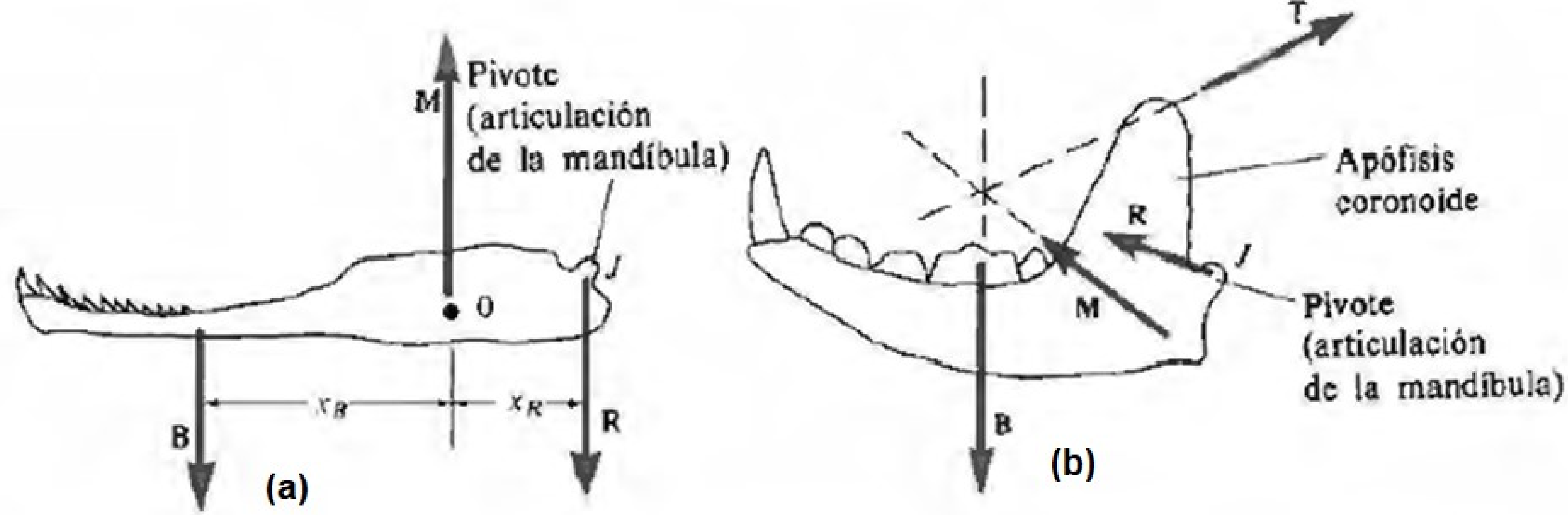
7- EQUILIBRIO ESTÁTICO Y DINÁMICA DE ROTACIÓN



REPASO CLASE PASADA

¿Consultas o dudas de lo visto anteriormente?

1. Peso efectivo en un ascensor.
2. Concepto de producto vectorial.
3. Torque: definición, efecto y cómo calcularlo.
4. Concepto de cuerpo rígido.
5. Condiciones de equilibrio de un rígido.
6. Centro de gravedad y de masa.
7. Tipos de equilibrio y estabilidad.
8. Fuerzas de rozamiento, coeficientes de fricción estática y cinética.
9. Fuerzas gravitatorias y peso.

Cuestiones que pretendemos responder hoy:

1. Máquinas simples: palancas y ventaja mecánica.
2. Aplicaciones del modelo de palanca a movimiento de animales y mandíbulas de animales.
3. Movimiento circular uniforme.
4. Movimiento circular con aceleración angular constante.
5. Segunda ley de Newton aplicada al movimiento circular.
6. Cinemática rotacional.
7. Relación entre torque y aceleración angular.

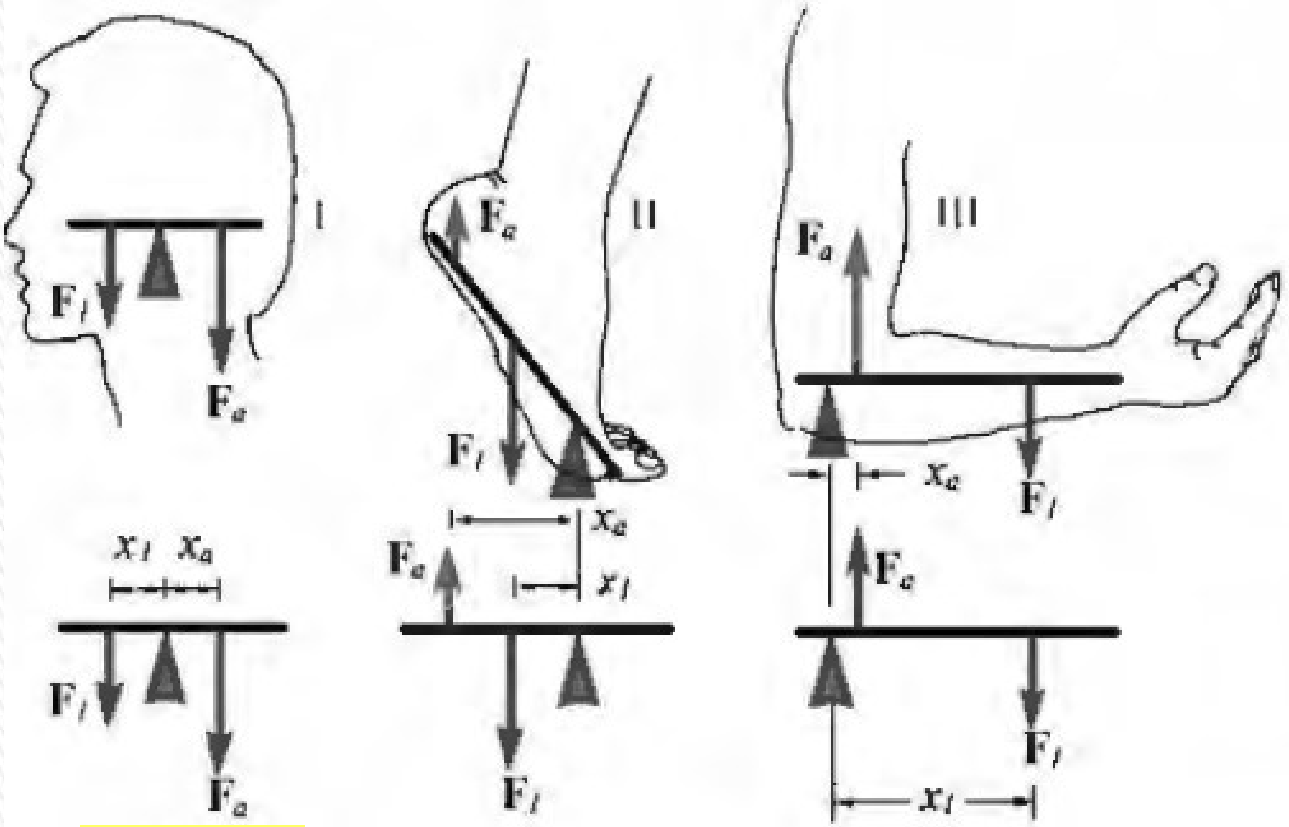
PALANCAS Y VENTAJA MECÁNICA

Máquinas simples: palancas y sistemas de poleas.

En cada caso, se aplica una fuerza $\boldsymbol{F_a}$. y se contrarresta una fuerza de carga $\boldsymbol{F_L}$.

La ***ventaja mecánica (V.M.) de la máquina*** *se define como el cociente* de los módulos de estas fuerzas

$$V.M. = \frac{F_L}{F_a}$$



Clase I

Clase II

Clase III

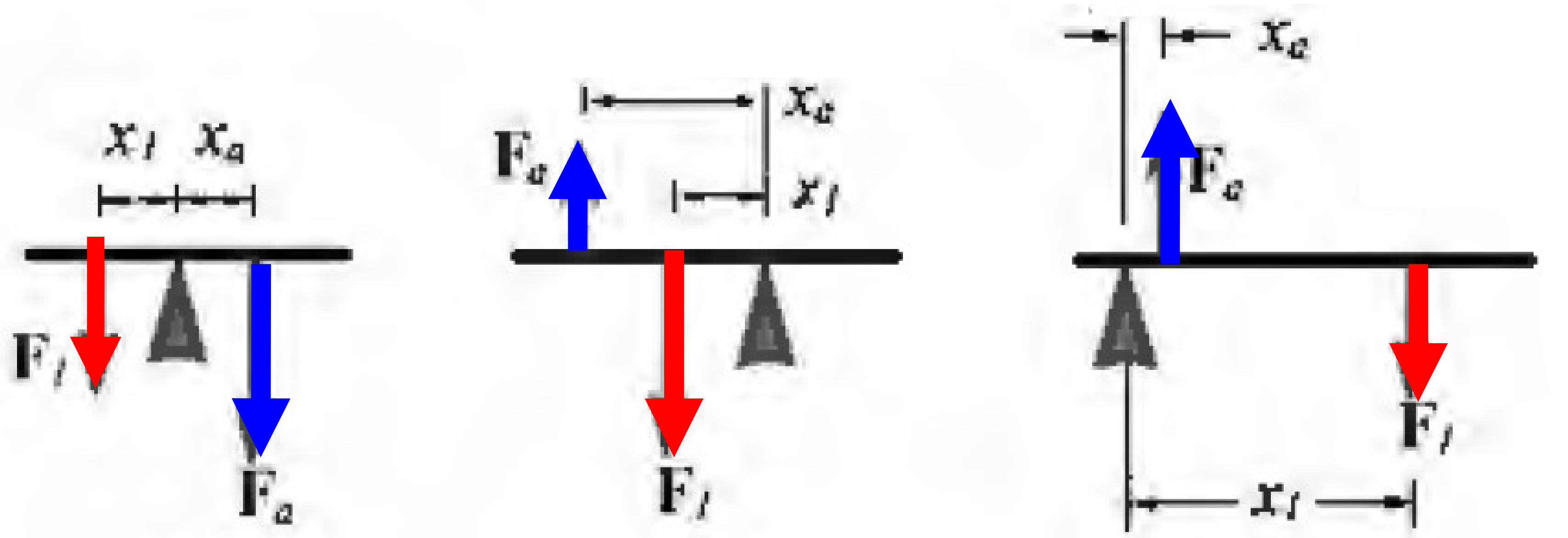
Una palanca es en esencia una barra rígida utilizada con un punto de apoyo (fulcro).

Según las posiciones relativas de F_L, F_a ***y el fulcro , se definen tres clases*** **de palanca**.

PALANCAS Y VENTAJA MECÁNICA

Ventaja mecánica: cociente entre las fuerzas de carga y la aplicada.
Si las fuerzas son perpendiculares a la palanca, la razón de la fuerza de carga y aplicada en equilibrio se pueden expresar a partir de sus distancias a fulcro:

$$V.M. = \frac{F_L}{F_a} = \frac{x_a}{x_L}$$



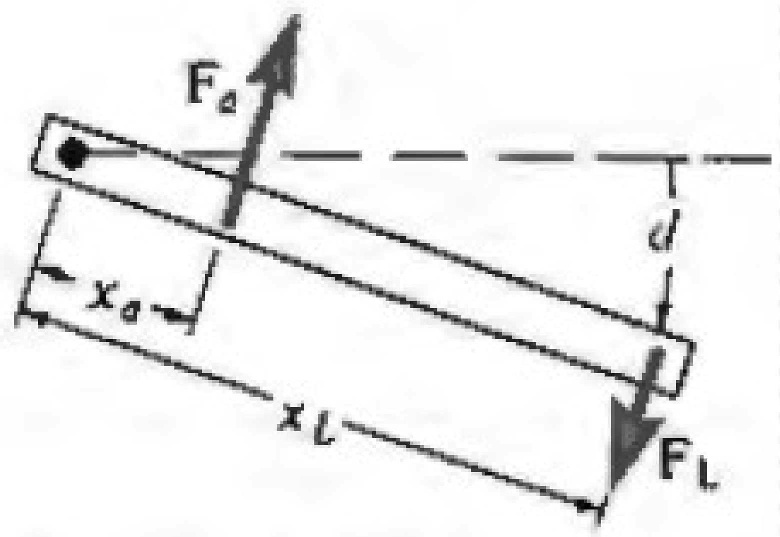
Se debe considerar la fuerza o componente perpendicular a la palanca.
Ventajas mecánicas de las palancas: **clase III es siempre menor que 1, clase II es siempre mayor que 1 y de clase I pueden ser mayor o menor que 1** .
La **ventaja mecánica V.M.** dada por la ecuación anterior es un valor ideal.
Las máquinas reales siempre tienen fuerzas de rozamiento que reducen la ventaja mecánica real por debajo de su valor ideal.

PALANCAS Y VENTAJA MECÁNICA

Las extremidades se pueden modelar como palancas tipo III.

Las extremidades cortas con pequeños valores de x_L *tendrán V.M.* relativamente grandes y serán capaces de ejercer grandes fuerzas.

Sin embargo, la distancia que recorre el extremo de un miembro es proporcional a su longitud x_L *por lo que el movimiento* rápido requiere extremidades largas.



Hay un compromiso entre la fuerza y la velocidad de movimiento.

La pata delantera de un caballo de carreras tiene una ventaja mecánica de 0,08.

El armadillo, que es un animal zapador, tiene una pata delantera cuya ventaja mecánica es 0,25. Por lo tanto, aunque no puede moverse con tanta velocidad, tiene la fuerza suficiente para excavar.

Las mandíbulas de los animales

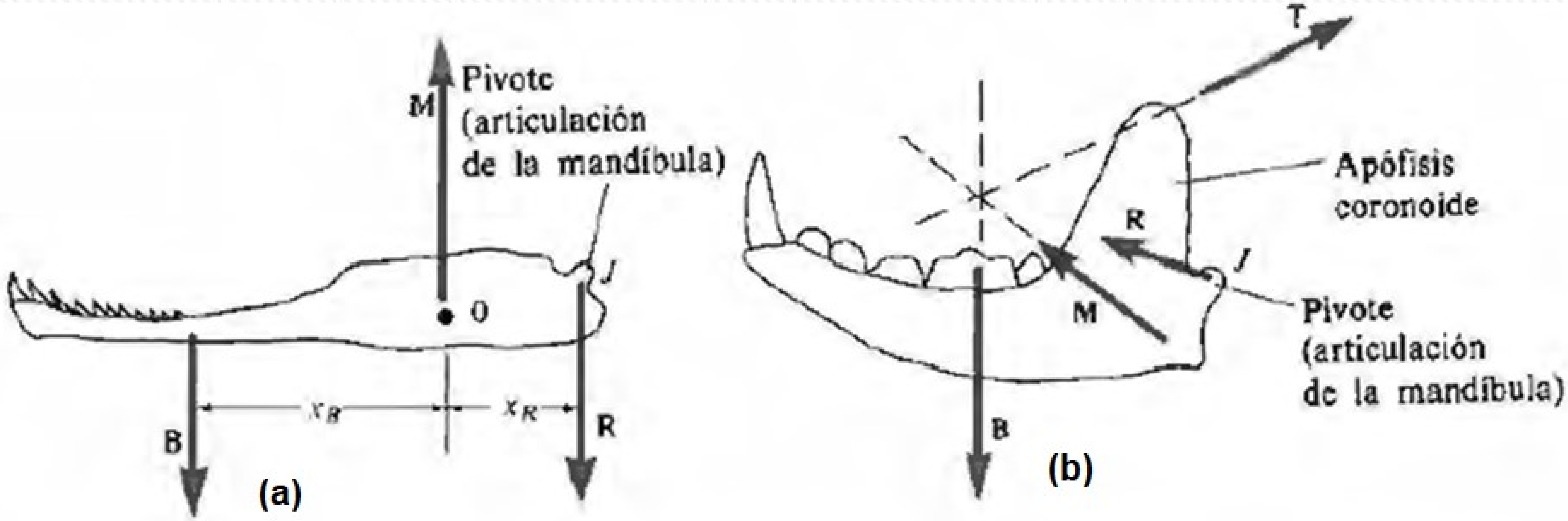
Un animal debe poder morder con fuerza: esto depende del módulo, dirección y punto de aplicación de las fuerzas ejercidas por los músculos que cierran la mandíbula.

Además, los huesos de la articulación *de la mandíbula superior con la inferior* deben ser lo suficientemente resistentes a fin de evitar fracturas y dislocaciones.

Los mamíferos han evolucionado a partir de reptiles de modo que los músculos implantados en la mandíbula inferior iban *creciendo progresivamente, mientras que los huesos de* la articulación iban *disminuyendo de tamaño, lo que se* explica en términos de los cambios de dirección y de punto de aplicación de las fuerzas musculares.

Las mandíbulas de los animales

Diferencias básicas entre la mandíbula inferior de un reptil primitivo y el típico aspecto de un mamífero actual.

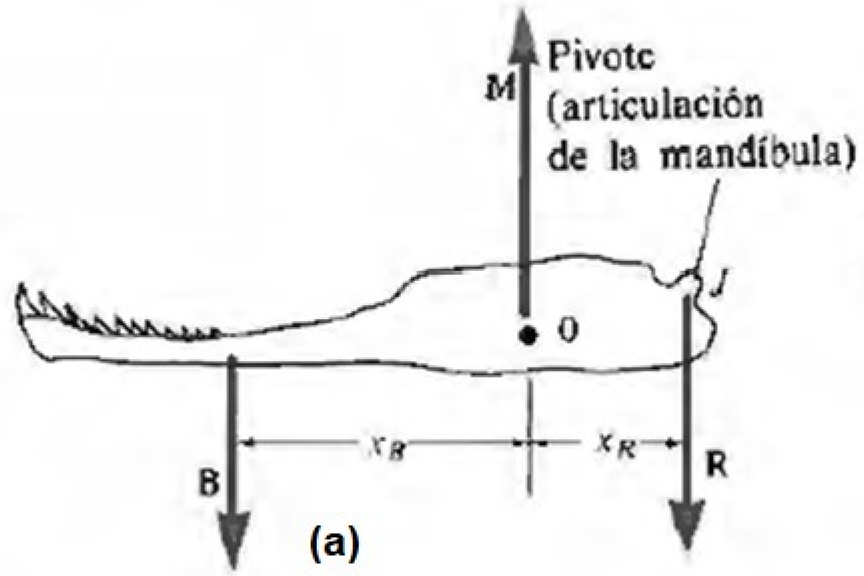


Mandíbula inferior de reptil primitivo - simple barra con unos músculos que empujan hacia arriba, implantados en un punto cercano a la articulación. **M** fuerza debida al músculo; **B** fuerza de reacción que presenta el objeto a la mordida y **R** fuerza debida a la articulación de la mandíbula en *J.*

Mandíbula de mamífero- tiene una gran protuberancia (***apófisis coronoides),*** *en la cual se implanta* **músculo *temporal*** *que* empuja hacia *atrás y hacia arriba* ***(fuerza T).*** El ***masetero*** *y el* ***pterygoides*** *empujan hacia adelante* y hacia arriba (fuerza **M).** La fuerza **R** debida a la articulación de la mandíbula puede ser nula si las líneas de acción de las tres fuerzas **T**, **B** y **M** (como se muestra).

Las mandíbulas de los animales

Para el reptil: calculando los momentos con respecto al punto O, el momento neto es cero si



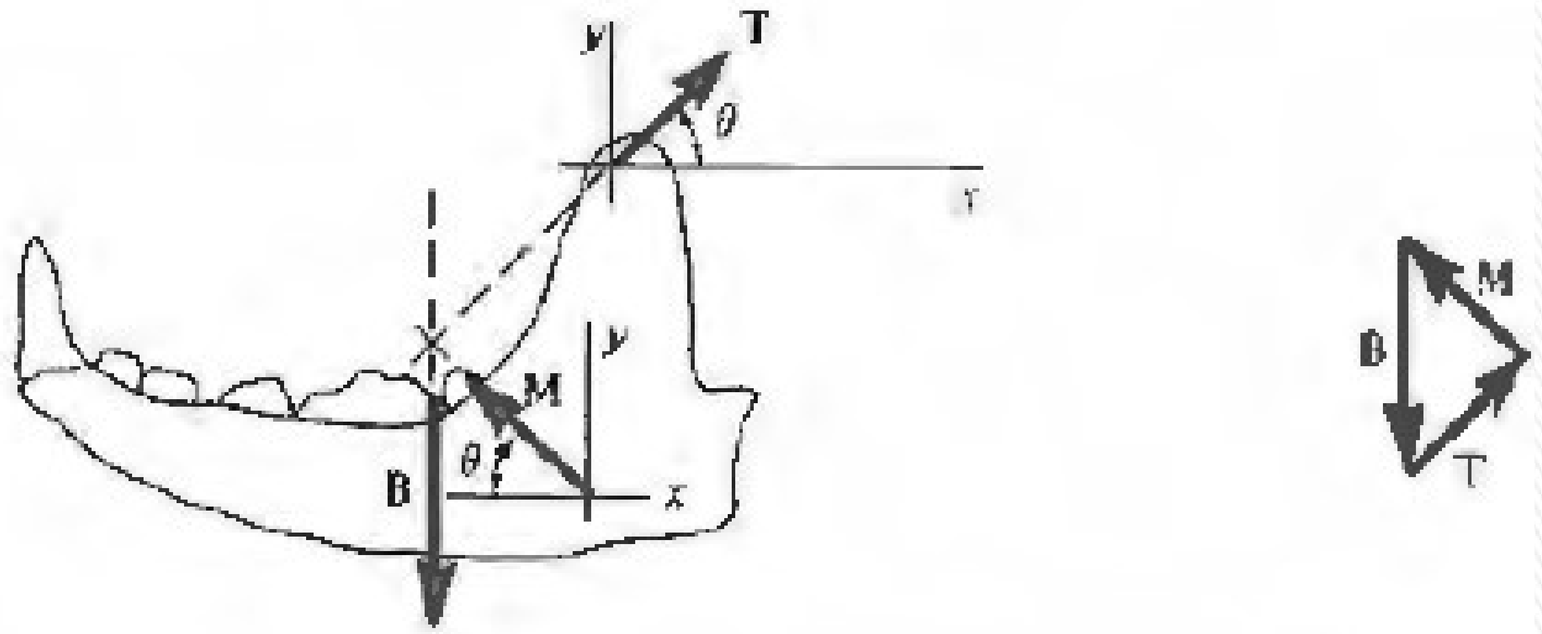
$$x_B . B - x_R . R = 0 \quad \Rightarrow R = \frac{x_B}{x_R} B$$

Como la fuerza neta sobre la mandíbula debe ser cero, *M – B – R = 0, la fuerza muscular requerida es*

$$M = B + R = B\left(1 + \frac{x_B}{x_R}\right)$$

Por ejemplo, si $x_B = 2x_R$ *y B = 100 N, entonces R = 200 N* y *M = 300 N.*
Así pues, ***la fuerza B sobre la comida es menor*** **que las fuerzas *M y R ejercidas por el músculo y* la articulación, respectivamente.**
Se ve claramente que la solidez de la articulación es un factor que limita la fuerza con que puede morder el reptil y el margen de seguridad del músculo.

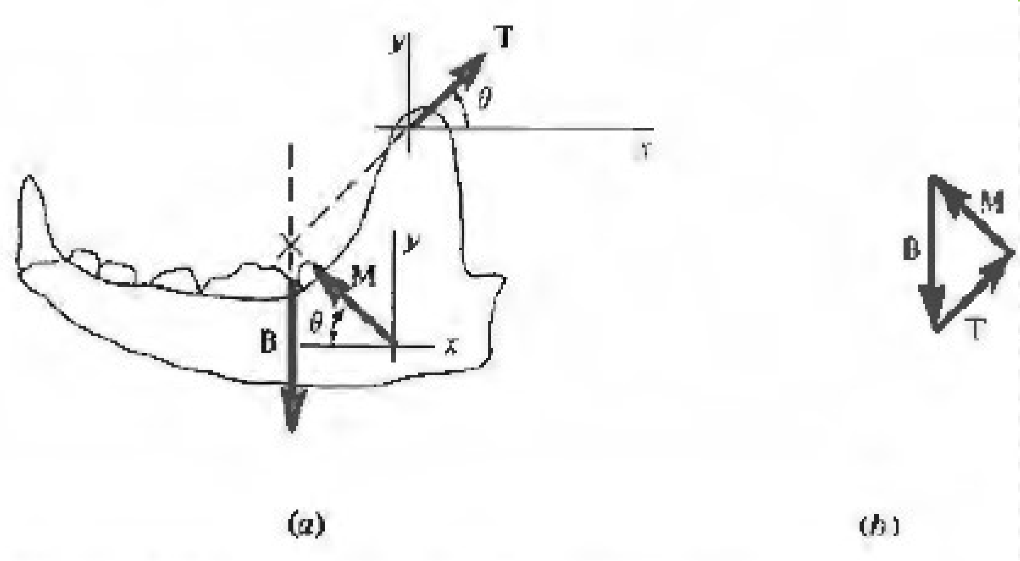
Las mandíbulas de los animales



Fuerzas sobre la mandíbula de un mamífero cuando la articulación no suministra fuerza alguna (fuerza R=0).

En la mandíbula de los mamíferos, la fuerza **M** se aplica asimismo a partir de la articulación y otra fuerza muscular, **T,** se halla también presente.
Si las líneas de acción de **T, M y B** se cortan en un punto, sus momentos con respecto a este punto son cero . Por consiguiente, la segunda condición de equilibrio, $\tau = 0$, requiere que también la línea de acción de **R** pase por este punto.
Además, cuando las fuerzas también satisfacen **T + M + B = 0,** *la articulación no debe proporcionar ninguna fuerza* ***R*** *para satisfacer la condición* Σ **F = 0.**

Las mandíbulas de los animales



Si **T + M + B** no es nula**,** o si sus líneas de acción no se cortan en un punto común, la articulación deberá proporcionar una fuerza **R**, que de todos modos será mucho menor que la correspondiente en el reptil.

Por lo tanto, la articulación no necesita una estructura tan grande y por lo tanto no limita el tamaño del músculo que puede tener el animal.

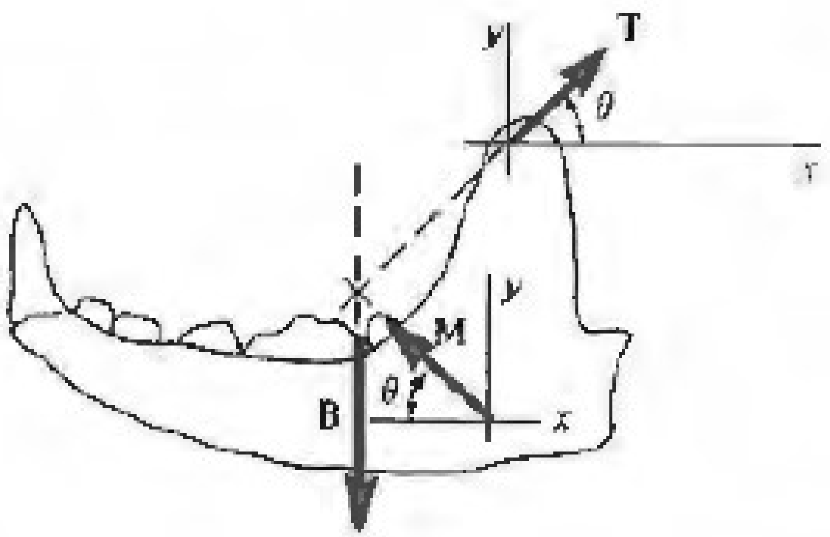
Los mamíferos carnívoros usan sus poderosos incisivos para desgarrar y transportar sus presas, mientras que los herbívoros muelen su comida lateralmente entre los molares.

El peso del músculo temporal de un carnívoro oscila entre la mitad y los dos tercios del peso total de los músculos que cierran las mandíbulas.

Sin embargo, en los herbívoros, este músculo sólo pesa una décima parte del total.

Ejemplo (similar 3.11)

Para ilustrar la superioridad de la mandíbula los mamíferos, supongamos que las fuerzas musculares **T** y **M** de la figura forman ambas un ángulo de θ= *45º con* la horizontal. ¿Cómo se ha de relacionar **M** con **T** para que la articulación no tenga que hacer ninguna fuerza **R** y cuánto valdrá la fuerza B ejercida sobre la comida?



(Suponer que las líneas de acción de B, T y M se cortan en un punto común, de modo que se cumple la segunda condición de equilibrio $\tau = 0$)

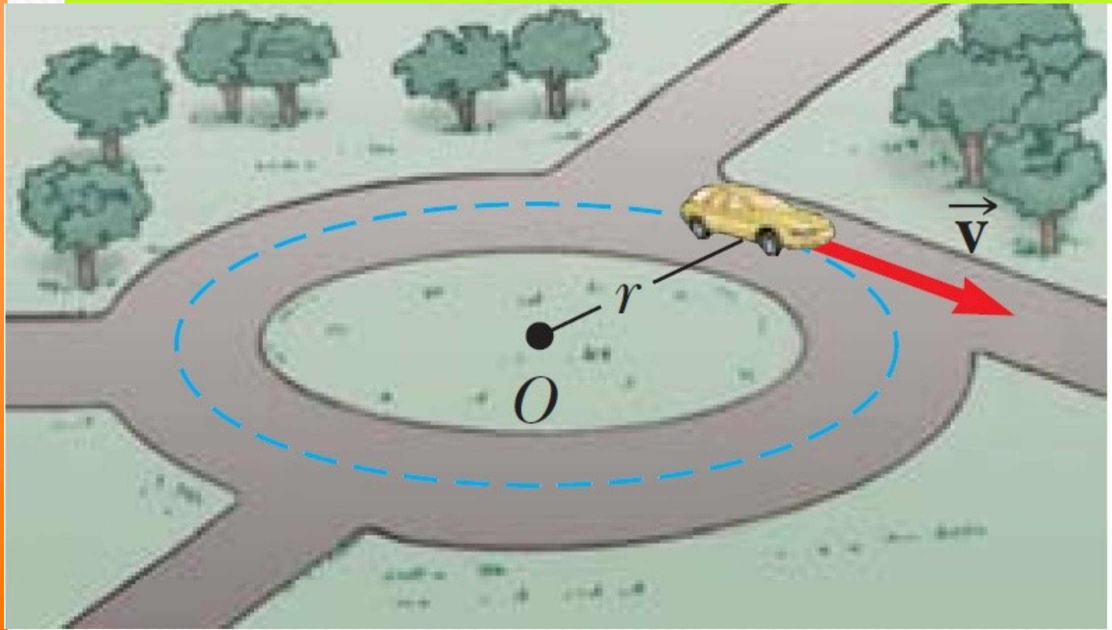
Según x: T cos 45° = M cos 45° por lo que resulta que T=M

Según y: T sen 45° + M sen 45°= B como sen 45°= $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo que resulta que: $B = \sqrt{2}\,M = \sqrt{2}\,T$

Por consiguiente, la fuerza *B ejercida por la mandíbula* sobre la comida es mayor que cualquiera de las dos fuerzas musculares *T y M, y la fuerza debida a la articulación* es nula. ***Por el*** **contrario, en el caso del reptil hallamos que la fuerza *B* es menor que la fuerza muscular o la fuerza de la articulación**.

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME



Un automovil se mueve en una trayectoria circular con *rapidez constante v:* este tipo de movimiento se conoce como **movimiento circular uniforme (MCU).**

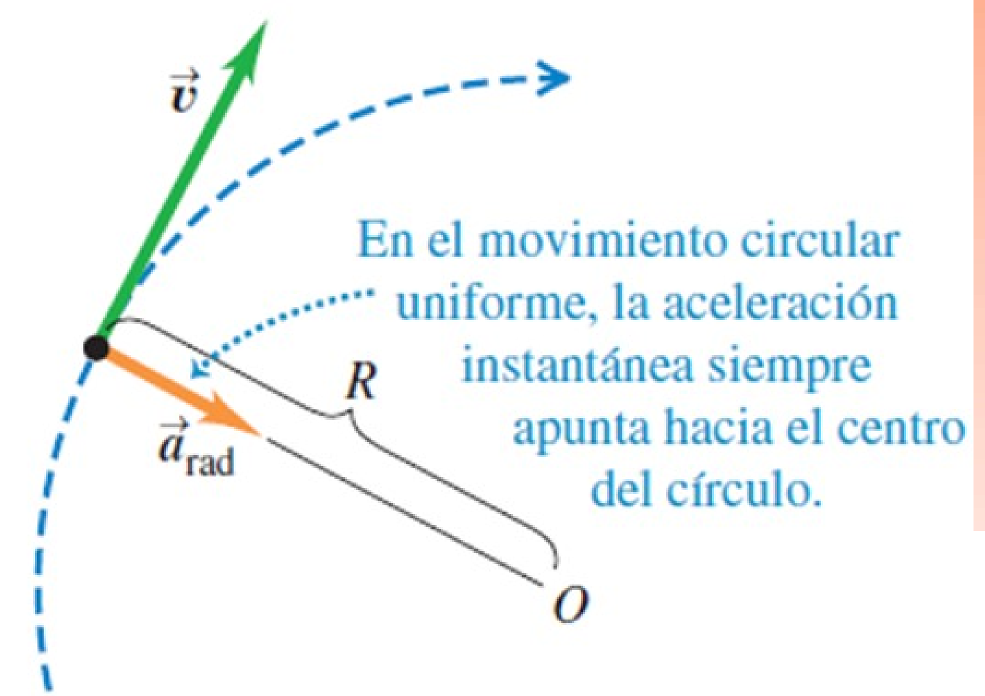
La **aceleración** depende del **cambio en la *velocidad***, *y como la velocidad* es una cantidad vectorial, puede ocurrir en dos formas: por un **cambio en la *magnitud de la velocidad*** *y por un* ***cambio en* la *dirección de la velocidad***.

La última situación ocurre para un objeto que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular.

El vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria del objeto y perpendicular al radio de la trayectoria circular.

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

El vector aceleración en MCU siempre es perpendicular a la trayectoria y siempre apunta hacia el centro del círculo.
Si eso no fuera cierto, habría una componente de la aceleración paralela a la trayectoria, paralela al vector velocidad, lo que provocaría a un cambio en la rapidez del móvil a lo largo de la trayectoria, esto contradice con que el móvil se mueve con rapidez constante a lo largo de la trayectoria.



En un MCU: la partícula se mueve en un círculo con *rapidez constante y el* vector aceleración es perpendicular a la trayectoria y se dirige al centro de la trayectoria circular: **aceleración centrípeta.**

$$a = a_{radial} = \frac{v^2}{R}$$

Ejemplo

La Tierra tiene 6380 km de radio y gira una vez sobre su eje en 24 horas. ¿Qué aceleración radial (a_{rad}) tiene un objeto en el ecuador? Dé su respuesta en m/s^2 y como fracción de g.

$$R = 6380\ km = 6{,}38 \times 10^6 m$$
$$T = 24\ h = 24 \times 60 \times 60\ seg = 86.400\ s$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(6{,}38 \times 10^6)}{86400} = 463{,}97\ m/s$$

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} = \frac{463{,}97^2}{6{,}38 \times 10^6} = 0{,}03374\ m/s^2$$

$a_{rad} = 3{,}4 \times 10^{-2}\ m/s^2 = 3{,}4 \times 10^{-3}\ g$

MOVIMIENTO CIRCULAR NO UNIFORME

Trayectoria circular y la rapidez varía.

La **aceleración radial** sigue valiendo lo mismo que en el uniforme, y *siempre es perpendicular* a la velocidad instantánea y dirigida al centro del círculo.
Su valor a_{rad} *no es constante. La aceleración radial (centrípeta) es mayor en el punto del* círculo donde la rapidez es mayor.

La aceleración tiene también una componente de aceleración *paralela a la velocidad instantánea* (a_{tan})

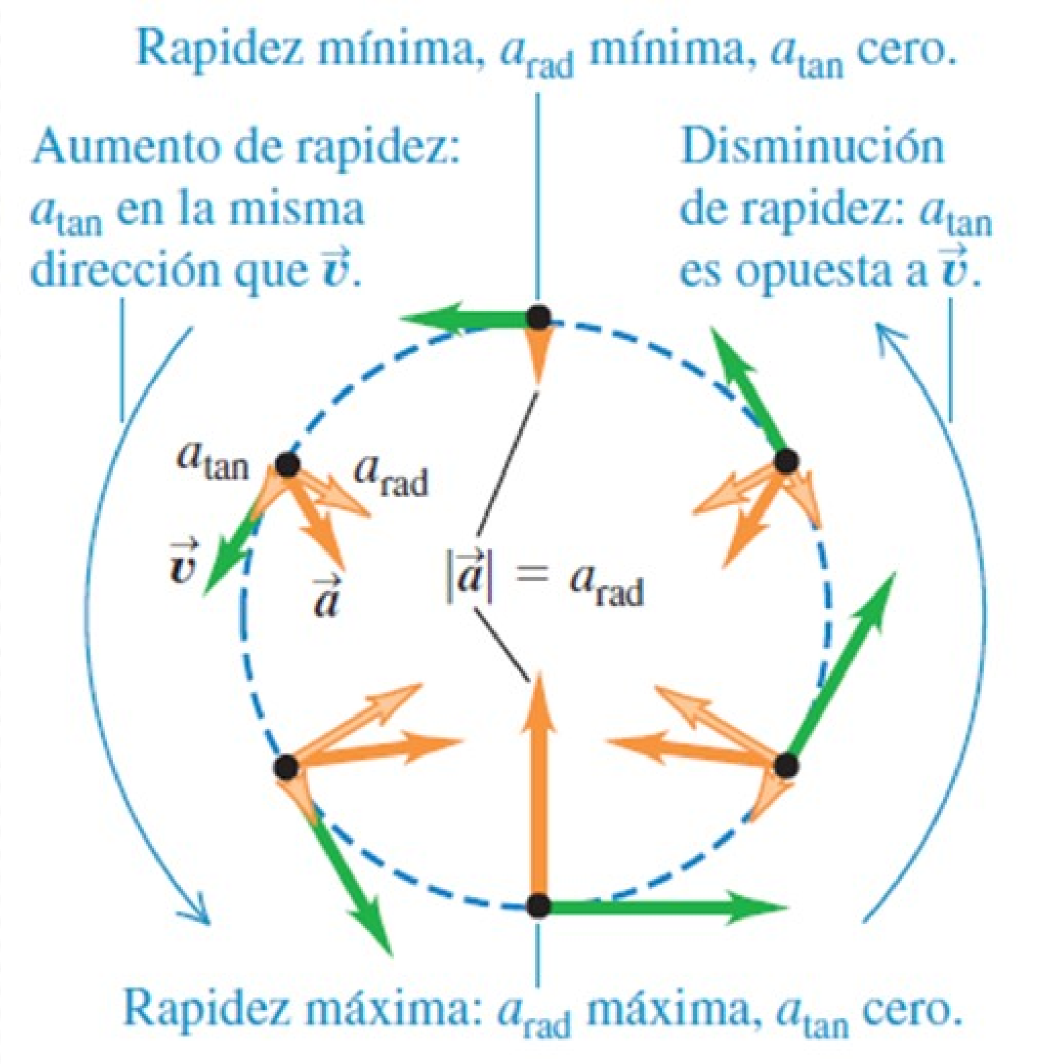
La componente de ***aceleración tangencial*** $\boldsymbol{a_{tan}}$ *es igual a la tasa* de cambio de la *rapidez*

$$a_{radial} = \frac{v^2}{R} \qquad a_{tangencial} = \frac{d|\bar{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

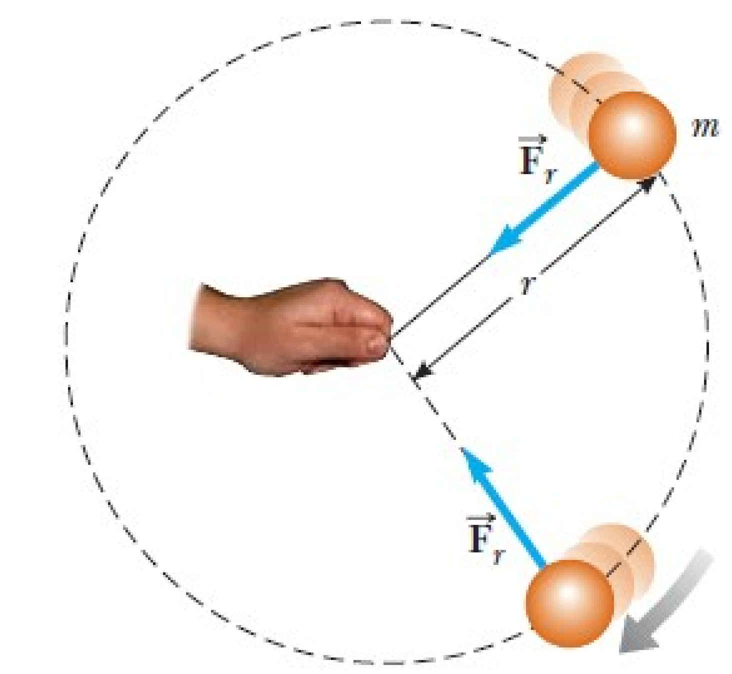
La componente tangencial tiene el mismo sentido que la velocidad si la partícula está acelerando, y la dirección opuesta si está frenando.

MOVIMIENTO CIRCULAR NO UNIFORME

Movimiento de un carrito de montaña rusa con rapidez variable (se modela como partícula que se mueve en círculo vertical)



Segunda ley de Newton para una partícula en movimiento circular uniforme



Consideremos una bola de masa *m que se ata a una cuerda de longitud r y se la hace* girar con rapidez constante en una trayectoria circular horizontal, sobre una mesa sin fricción, como se muestra.

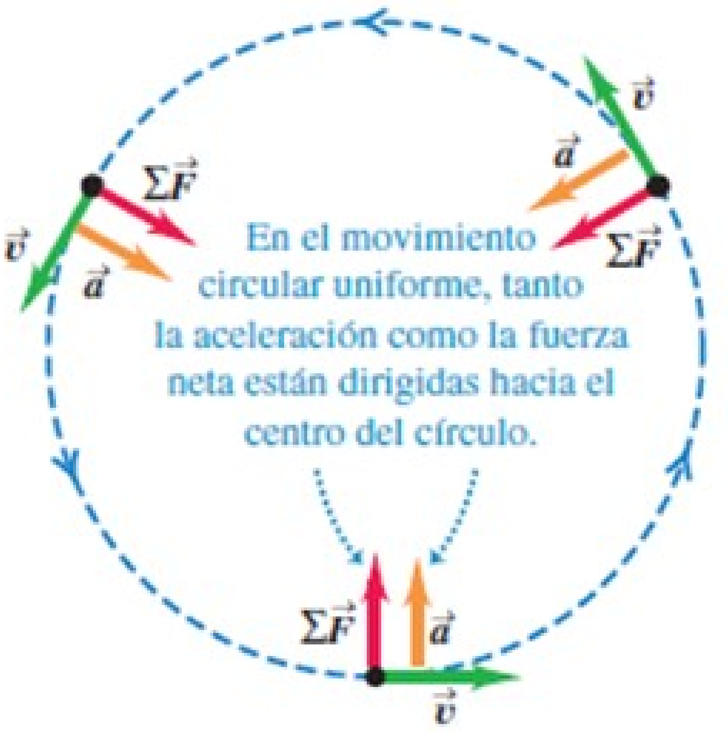
De acuerdo con la primera ley de Newton, la bola se movería en una línea recta si no hubiese fuerza en ella; sin embargo, la cuerda evita el movimiento a lo largo de una línea recta al ejercer en la bola una fuerza radial $\mathbf{F}_r$ que la hace seguir la trayectoria circular.

Si se aplica la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección radial, la fuerza neta que causa la aceleración centrípeta se relaciona con la aceleración así:

$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r}$$

Si la cuerda se rompe en algún instante, la bola se mueve a lo largo de la trayectoria en línea recta que es tangente al círculo en la posición de la bola en ese instante.

DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR



Cuando una partícula se mueve en un círculo con rapidez constante, su aceleración siempre es hacia el centro del círculo (perpendicular a la velocidad instantánea).

La magnitud a_{rad} *de la aceleración es constante y está dada en términos de la rapidez v y el radio R* del círculo por

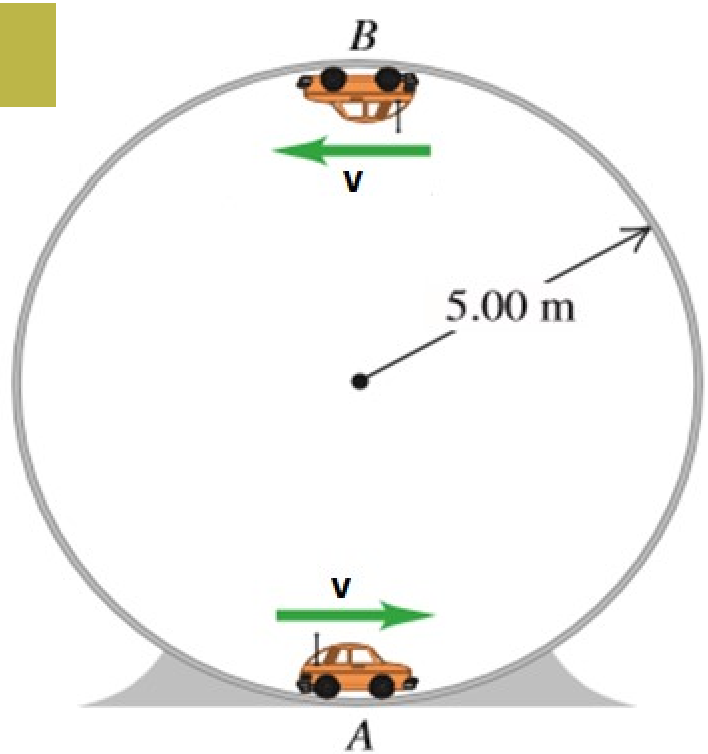
$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(movimiento circular uniforme)}$$

2da. Ley de Newton aplicada a la dirección radial en un movimiento circular uniforme:

$$F_{\text{neta}} = ma_{\text{rad}} = m\frac{v^2}{R}$$

Ejemplo: ejercicio 4.2

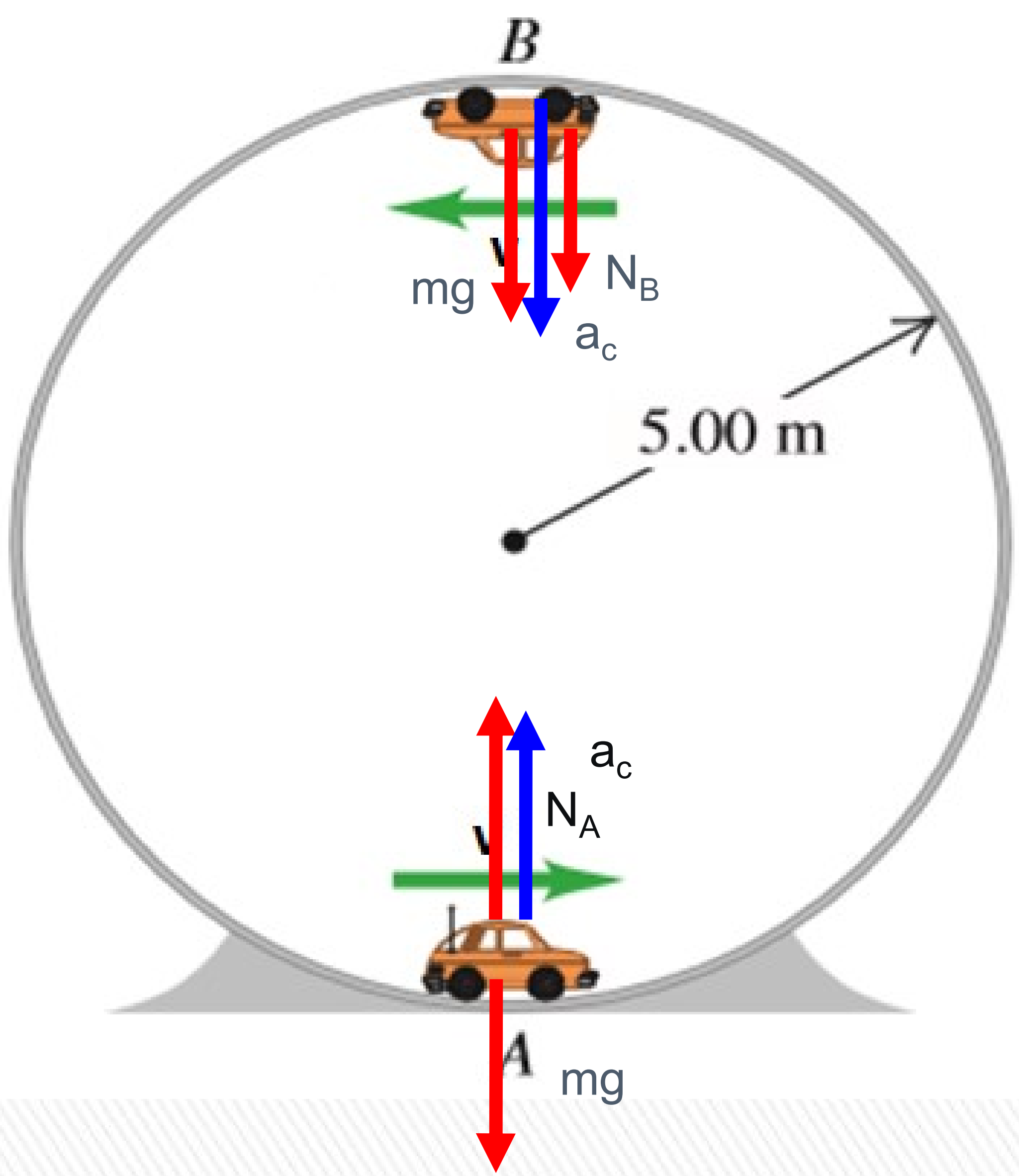
Un carrito con masa de 0,800 kg viaja con rapidez constante en el interior de una pista circular vertical de radio igual a 5,00m. Si la fuerza normal ejercida por la pista sobre el carrito cuando está en la parte superior de la pista (punto B) es de 6,00N, ¿cuál es la fuerza normal sobre el carrito cuando se encuentra en la parte inferior de la pista (punto A)?



Como la rapidez es constante, la aceleración radial del carrito es constante, es la aceleración centrípeta.

Para calcular la normal en A (N_A), debo aplicar la 2da. Ley de Newton en el punto A, y relacionar las fuerzas actuantes y la aceleración. Pero desconozco la aceleración…que depende la rapidez. Entonces debo plantear la 2da. Ley de Newton en el punto B… donde conozco cuánto vale la normal (N_A = 6,00 N)

Diagramas de cuerpo libre (DCL)



Vamos a representar los DCL en los puntos B y A

En B: actúan 2 fuerzas el peso del auto mg y la normal $N_{B,}$ ambas dirigidas hacia el centro.

Además vamos a representar la aceleración centrípeta a_c, dirigida hacia el centro.

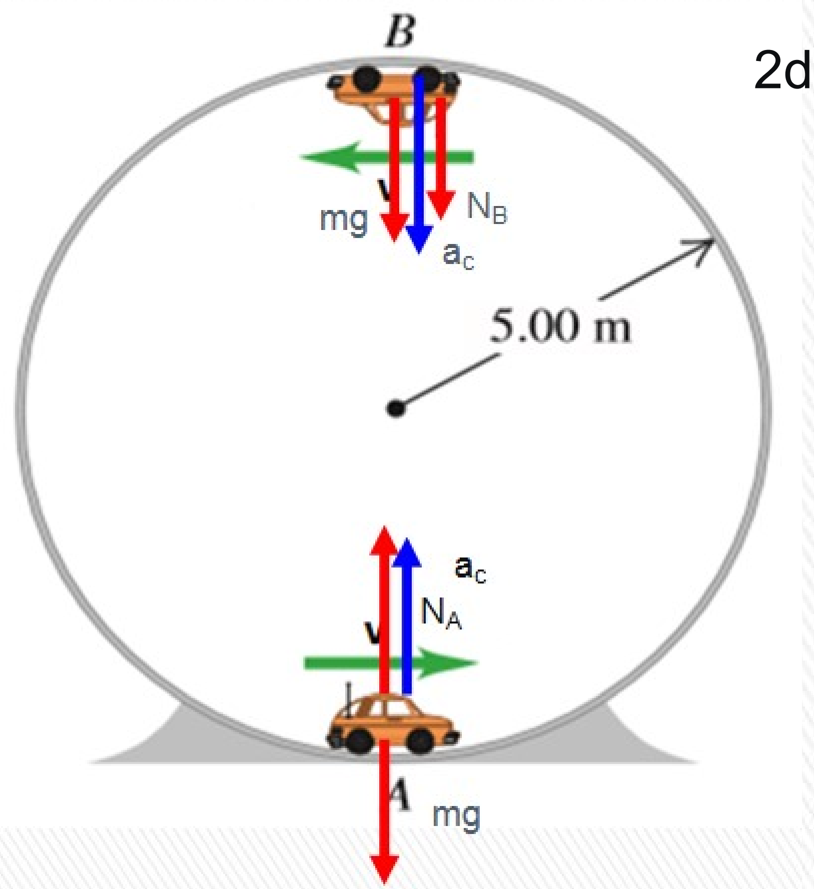
En A: actúan 2 fuerzas el peso del auto mg (hacia abajo) y la normal $N_{B,}$ hacia arriba.

Incluimos además la aceleración centrípeta a_c, dirigida hacia el centro.

Ejemplo: ejercicio 4.2

Aceleración centrípeta: $a = \frac{v^2}{R}$

Diagramas de cuerpo libre (DCL)



2da. Ley de Newton en B: $ma = N_B + mg$

2da. Ley de Newton en A: $ma = N_A - mg$

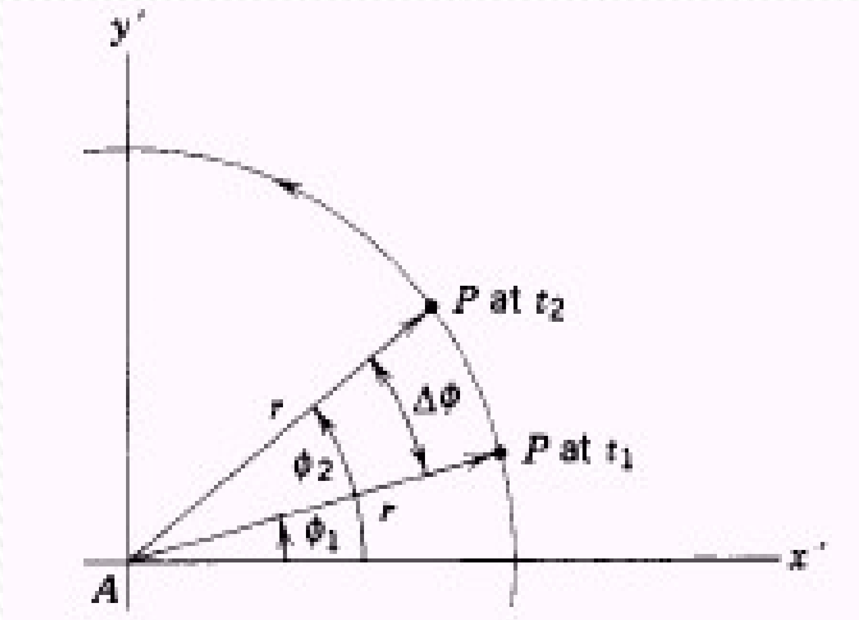
$N_B + mg = N_A - mg$

$N_A = N_B + 2mg = 6{,}00 + 2(0{,}800)\ 9{,}8 =$

$\boxed{N_A = 21{,}7\ N}$

VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES

Movimiento de rotación- Rotación pura si cada punto del cuerpo rígido se mueve en trayectoria circular. Los centros de estos círculos están sobre una recta común (**eje de rotación)**.



Variables de rotación-

Ángulo ϕ: posición angular de la línea de referencia AP (en radianes) y con sentido positivo de rotación antihorario.

ϕ está dado en radianes por la relación:

$$\phi = \frac{s}{r}$$

s es el arco y *r* es el radio de la cfa

$$1\ rad = \frac{180º}{\pi} \cong 57{,}3º$$

Desplazamiento angular de P será $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$

VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES

Velocidad angular media:

$$\omega_{media} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Velocidad angular ω:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}$$

Aceleración angular media

$$\alpha_{media} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Aceleración angular (α)

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$1 \text{ rev/s} = 2\pi \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad 1 \text{ rev/min} = 1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$$

Velocidad angular positiva si el cuerpo gira en la dirección de Φ creciente.

Para un cuerpo rígido tanto ω como α son únicos (valen lo mismo para cada punto).

Rotación con aceleración angular constante

Las ecuaciones resultan ser similares a las ecuaciones vistas anteriormente para MRUA si sustituimos *x por θ*, v_x *por* ω_z*, y* a_x *por* α_z.

Consideramos que la aceleración angular α_z es constante

Tabla 9.1 Comparación del movimiento lineal y angular con aceleración constante

Movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante		Rotación sobre un eje fijo con aceleración angular constante	
$a_x = \text{constante}$		$\alpha_z = \text{constante}$	
$v_x = v_{0x} + a_x t$	(2.8)	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$	(9.7)
$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	(2.12)	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$	(9.11)
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	(2.13)	$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$	(9.12)
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	(2.14)	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t$	(9.10)

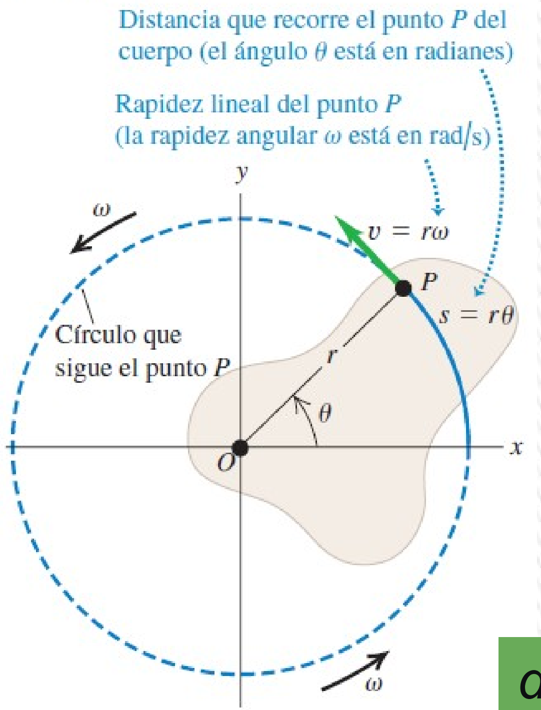
Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Cuerpo rígido girando alrededor de un eje fijo que pasa por O. Las partículas se mueven en una trayectoria circular, en un plano perpendicular al eje.
Punto *P a una distancia constante r de O, describe círculo de radio r.*

Ángulo θ (en radianes) y la longitud del arco *s:* $s = r.\theta$

Derivando con respecto al tiempo (*r es constante)* y tomando el valor absoluto:

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = r\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$



$$v = r\,\omega$$

$|ds/dt|$ *valor absoluto de la tasa de cambio de la longitud de arco,* igual a la ***rapidez** lineal instantánea v de la partícula.*

$|d\theta/dt|$ es la **rapidez angular instantánea ω** (magnitud velocidad angular instantánea en rad/s)

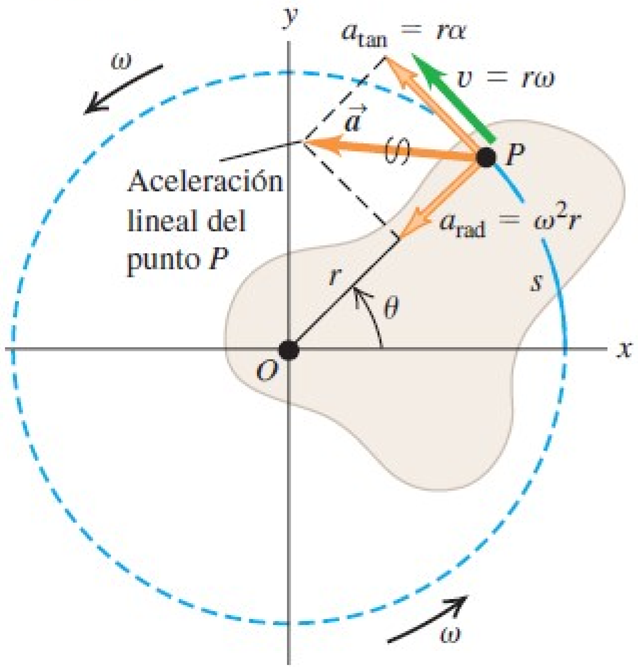
dirección del *vector v: tangente a la trayectoria circular en todos los puntos*

Cada punto sobre el objeto rígido tiene la misma rapidez *angular, pero no todo punto tiene la misma rapidez tangencial* *porque r no es el* mismo para todos los puntos sobre el objeto.

Aceleración lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Componentes de aceleración radial y tangencial:

- $a_{rad} = \omega^2 r$ es la aceleración centrípeta del punto P.
- $a_{tan} = r\alpha$ significa que la rotación de P está aumentando (el cuerpo tiene aceleración angular).



Derivando respecto al tiempo: $v = r\,\omega$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\,\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha_z$$

Se vio que un punto que se mueve en una trayectoria circular tiene una **aceleración radial *a_r* *dirigida hacia el centro de rotación y cuya magnitud* es la de la aceleración centrípeta *v^2/r***.

Como v = r ω, la aceleración centrípeta en dicho punto se puede expresar en términos de rapidez angular

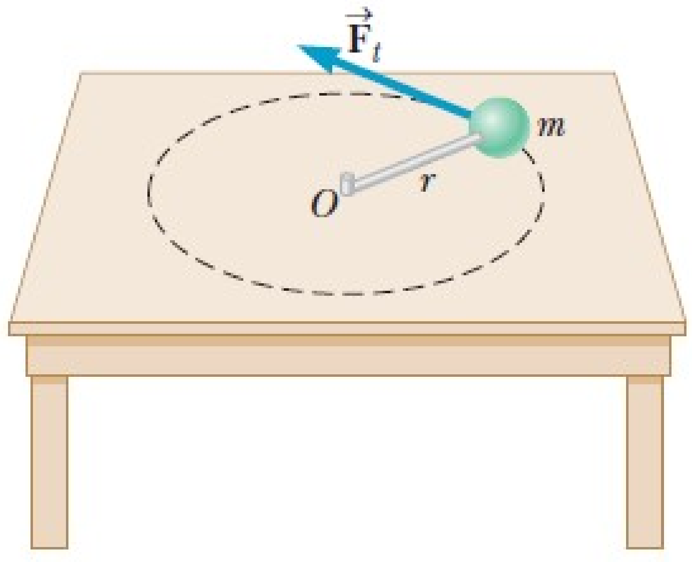
$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\,\omega^2$$

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{a}_t} + \overline{\boldsymbol{a}_c}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{(r\alpha_z)^2 + (r\,\omega^2)^2} = r\sqrt{\alpha_z^2 + \omega^4}$$

Relación entre el torque y la aceleración angular

Veremos que cuando un rígido está sujeto a un torque neto, experimenta una aceleración angular proporcional al mismo, resultado similar a la 2da. ley de Newton, pero para rotaciones.



Sistema de la figura: objeto de masa *m unido a una barra muy* ligera de longitud *r, que gira alrededor del punto O sobre* una mesa *horizontal sin fricción. Supongamos que una fuerza F_t actúa perpendicularmente* a la barra (tangente a la trayectoria circular del objeto).

Debido a que no hay fuerza opuesta a la fuerza tangencial, el objeto experimenta una aceleración tangencial a_t *de acuerdo con la segunda ley del Newton:* $m.a_t = F_t$

Muliplicando ambos miembros por r: $m.a_t.r = F_t.r$

Y ahora, sustituyendo: $a_t = \alpha.r$ *resulta:* $m.\alpha.r^2 = F_t.r$

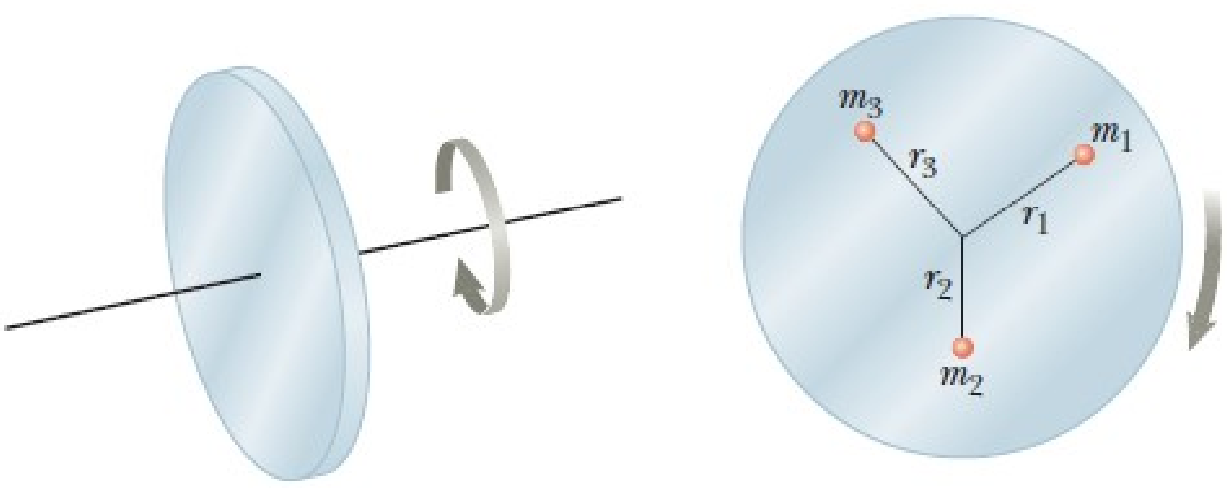
Pero el 2do. miembro es el torque que actúa sobre el objeto en relación con su eje de rotación, así que se puede rescribir como $m.\alpha.r^2 = \tau$

Relación entre el torque y la aceleración angular

$m.r^2\ \alpha = \tau$

$I.\alpha = \tau$

El torque (τ) sobre el objeto es proporcional a la aceleración angular (α) de éste, donde la constante de proporcionalidad *mr*^{2} *se conoce como el* ***momento de inercia (I)*** del objeto de masa *m* *con respecto al punto O.*
(Como la barra es muy ligera, su momento de inercia puede despreciarse).



Sea un disco sólido que rota sobre su eje como en la figura.
El disco consiste en muchas partículas a varias distancias del eje de la rotación.
El torque en cada una de estas partículas está dado por la ecuación anterior.

El torque *neto sobre* el disco está dado por la suma de los torques individuales τ_i en todas las partículas, y etiquetando a c/u de las masas y a sus distancias con respecto al eje con un subíndice *i* :

$$\sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i . r_i^2\right)\alpha$$

Como el disco es rígido, todas sus partículas tienen la *misma aceleración angular,* así que a no está involucrada en la suma.

Relación entre el torque y la aceleración angular

$$\sum_i m_i . r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots$$

Esta cantidad es el **momento de inercia, *I*,** *de todo el cuerpo respecto al eje que pasa por O.:*

El momento de inercia tiene unidades SI de $kg.m^2$.
Utilizando este resultado en la ecuación anterior, vemos que el torque neto sobre un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo está dado por:

$$\sum \tau = I\alpha$$

La expresión indica que **la aceleración angular de un objeto rígido es proporcional al torque neto que actúa sobre él,** y es el análogo rotatorio de la 2da. Ley de Newton.

En esta ecuación el torque sustituyendo a la fuerza, el momento de inercia que sustituye a la masa y la aceleración angular, a la aceleración lineal.

Aunque el momento de inercia de un objeto se relaciona con su masa, hay una importante diferencia entre ellos.
La masa *m depende solamente de la cantidad de materia en un objeto, mientras* que el momento de la inercia, *I, depende de la cantidad de materia y de su distribución* (con el término r^2 *en* $I = \Sigma mr^2$*) en el objeto rígido.*

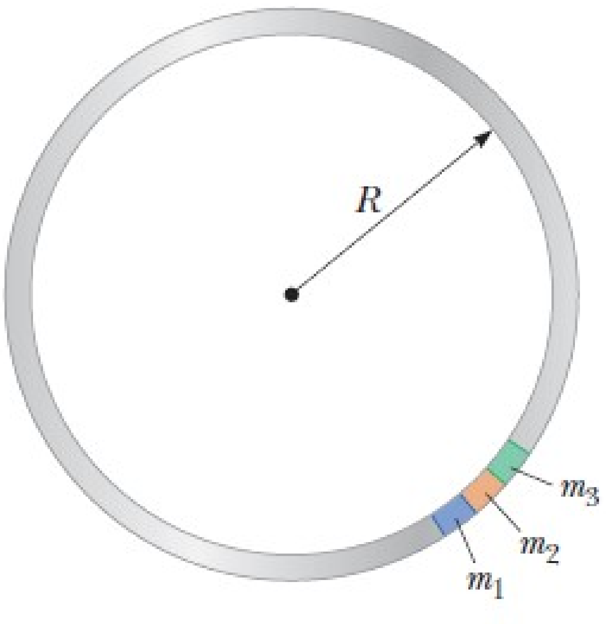
Momento de inercia

Como vimos una partícula tiene un momento de inercia igual a *mr^2 en relación con un cierto eje.*

El momento de inercia de un objeto compuesto sobre un cierto eje es justo la suma de los momentos de inercia de los componentes del objeto

$$I = \sum_i m_i . r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots$$

La masa es una característica intrínseca del objeto y que no cambia, mientras que el **momento de inercia de un sistema depende de cómo la masa se distribuye y de la ubicación del eje respecto al cual se calcula I .**



Cuando el objeto es continuo, como una esfera o un cilindro se requieren a menudo técnicas del cálculo, a menos que una cierta simetría esté presente.

Un objeto de solución simple es un aro que rota sobre un eje perpendicular a su plano y que pasa a través de su centro (como la rueda de una bicicleta). Para evaluar el momento de inercia del aro, podemos todavía utilizar la ecuación $I = \Sigma mr^2$ *e imaginarse que la masa del aro M está dividida en n pequeños segmentos de* masas $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$, *como se ve en la figura, con* $M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots m_n$.

Momento de inercia

Podemos expresar *I como la suma:* $$I = \sum_i m_i . r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots + m_n r_n^2$$

Todos los segmentos alrededor del aro están a la *misma distancia R del eje de rotación, así* que podemos usar subíndices en las distancias y factorizar R_2 *para obtener*

$$I = (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n) R^2 = MR^2$$

Expresión que se puede usar para el momento de inercia de cualquier objeto de forma anular, que rota sobre un eje a través de su centro y perpendicular a su plano. Este resultado es estrictamente válido solamente si el grueso del anillo es pequeño en relación con su radio interno.
Desafortunadamente, para objetos más extensos el cálculo es más difícil porque no todos los elementos demasa están situados a la misma distancia del eje, por lo que se requieren los métodos del cálculo integral.

Los momentos de inercia para algunas otras formas comunes se muestran en la próxima diapositiva.
Se puede utilizar esta tabla cuando necesite determinar el momento de inercia de un cuerpo que tiene las formas mencionadas

Momentos de inercia de diversos cuerpos homogéneos