Número complejo

Andrés Abella

27 de junio de 2023

Los números complejos se estudian en enseñanza secundaria, por lo tanto lo que sigue está pensado como un repaso del tema, omitiendo las demostraciones más directas.

Partimos asumiendo que existe un conjunto $\mathbb{C}$, cuyos elementos llamamos *números complejos*, en el cual está definida una operación llamada *suma* que escribimos $x + y$ y otra llamada *producto* que escribimos $x \cdot y$ o xy, tales que:

1. La suma y el producto verifican las siguientes propiedades.

   - *Propiedad asociativa de la suma y del producto.*

     $$x + (y + z) = (x + y) + z \quad \text{y} \quad x(yz) = (xy)z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{C}.$$

   - *Propiedad conmutativa de la suma y del producto.*

     $$x + y = y + x \quad \text{y} \quad xy = yx, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}.$$

   - *Propiedad distributiva del producto respecto a la suma.*

     $$x(y + z) = xy + xz \quad \text{y} \quad (x + y)z = xz + yz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{C}.$$

   - *Existencia de neutros en la suma y producto.* Existen $0, 1 \in \mathbb{C}$, $0 \neq 1$, tales que

     $$x + 0 = 0 + x = x \quad \text{y} \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

   - *Existencia de opuesto e inverso.*

     $$\begin{gathered}\forall x \in \mathbb{C},\ \exists y \in \mathbb{C} \text{ tal que } x + y = y + x = 0 \text{ (existencia de opuesto)},\\ \forall x \in \mathbb{C},\ x \neq 0,\ \exists z \in \mathbb{C} \text{ tal que } xz = zx = 1 \text{ (existencia de inverso)}.\end{gathered}$$

   Cualquier conjunto con una suma y un producto que verifique estos axiomas se dice que es un *cuerpo*. En particular $\mathbb{C}$ es un cuerpo. También son cuerpos el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y el de los reales $\mathbb{R}$.

2. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ está contenido en $\mathbb{C}$ y la suma y producto de $\mathbb{C}$ restringidas a $\mathbb{R}$ son la suma y producto habituales de $\mathbb{R}$ (en particular $0, 1 \in \mathbb{C}$ conciden con $0, 1 \in \mathbb{R}$).

3. Existe un elemento $i \in \mathbb{C}$ que verifica:

   a) $i^2 = -1$.

   b) Para todo $z \in \mathbb{C}$, existen únicos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $z = a + bi$.

El elemento $i \in \mathbb{C}$ se llama la *unidad imaginaria*. Si $z = a + bi$, entonces diremos que a es la *parte real* de z y que b es la *parte imaginaria* de z. Si la parte real del complejo z es 0 ($z = bi$), entonces diremos que z es *imaginario puro*.

Propiedades.

1. El opuesto y el inverso son únicos (esto vale en todo cuerpo). El opuesto de z se escribe $-z$ y queda caracterizado por verificar $z + (-z) = (-z) + z = 0$. El inverso de $z \neq 0$ se escribe z^{-1} y queda caracterizado por verificar $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$.

   Lo que sigue está relacionado con la notación de la parte $3b$.

2. La unicidad en la parte $3b$ implica

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \ \text{ y } \ b = d.$$

   En particular, si $z = a + bi$, entonces $z = 0$ si y solo si $a = b = 0$.

3. La suma y el producto verifican

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i, \quad (a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

4. El opuesto de $z = a + bi$, es $-z = (-a) + (-b)i$.

5. La *resta* en $\mathbb{C}$ se define por $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2)$. Vale $z_3 = z_1 - z_2$ si y solo si $z_1 = z_3 + z_2$.

6. El inverso de $z = a + bi \neq 0$, es $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$.

7. Supongamos $z_2 \neq 0$. El *cociente* de z_1 por z_2 se define por $\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot z_2^{-1}$. Vale $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ si y solo si $z_1 = z_3 z_2$.

Construcción de los números complejos. En $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ definimos una suma y producto mediante

$$(a, b) + (c, d) := (a + b, c + d); \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Es un ejercicio el probar que $\mathbb{R}^2$ con estas operaciones verifica los axiomas de cuerpo (el neutro de la suma es $(0, 0)$ y el neutro del producto es $(1, 0)$). La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (x, 0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, es inyectiva y preserva la suma y el producto, es decir valen

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0), \quad (x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Luego podemos identificar el conjunto $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}$ con $\mathbb{R}$, escribiendo $(a, 0) = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$. De esta foma $\mathbb{R}$ resulta un subcuerpo[1] de $\mathbb{R}^2$. Si llamamos $i := (0, 1)$, entonces $i^2 = (-1, 0)$. Luego con nuestra identificación es $i^2 = -1$ y además vale

$$a + bi = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b), \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Así que $\mathbb{R}^2$ con estas operaciones verifica las tres condiciones que definen a $\mathbb{C}$. Luego podemos definir el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}^2$ con esa suma y producto. Esto prueba la existencia de $\mathbb{C}$. Pensado a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}^2$, a la recta $Ox = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ se le llama el *eje real* y a $Oy = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ se le llama el *eje imaginario*. En lo que sigue a menudo usaremos esta interpretación de los números complejos como puntos del plano $\mathbb{R}^2$.

[1] Estrictamente hablando, $\mathbb{R}$ no es un subcuerpo de $\mathbb{R}^2$, si no que $\mathbb{R}^2$ contiene el subcuerpo $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}$ que es isomorfo a $\mathbb{R}$, pero a nivel práctico es lo mismo.

Conjugado. El *conjugado* de $z = a + bi$ es $\overline{z} := a - bi$. La conjugación verifica las siguientes propiedades.

1. $\overline{\overline{z}} = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
2. Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $z \in \mathbb{R}$ si y solo si $z = \overline{z}$.
3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Si pensamos $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}^2$, entonces el conjugado de z es el simétrico de z respecto al eje real.

Módulo. El *módulo* de $z = a + bi$ es $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Notar que el módulo $z = a + bi$ mide la distancia del origen $(0, 0)$ al punto (a, b). El módulo verifica las siguientes propiedades.

1. Si $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, entonces el módulo de z coincide con su valor absoluto[2].
2. Para todo $z \in \mathbb{C}$ vale $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.
3. Si $z \neq 0$, entonces la fórmula anterior implica $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. A su vez, esto implica $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$.
4. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ y $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
5. $|z| \geq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ y $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.

El módulo en $\mathbb{C}$ juega el rol del valor absoluto en $\mathbb{R}$.

Potencia. Si $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, entonces la *potencia* z^n se define por recurrencia mediante

$$z^0 := 1, \qquad z^{n+1} := z^n \cdot z, \quad \forall n \geq 1.$$

Esto implica $z^1 = z$, $z^2 = z \cdot z$, $z^3 = z \cdot z \cdot z$, etc. Además, si $0 \neq z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces definimos $z^{-n} := (z^n)^{-1}$. De esta forma tenemos definido z^n, para $0 \neq z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Valen las propiedades habituales de las potencias en $\mathbb{R}$:

$$z^n \cdot z^m = z^{n+m}, \quad \frac{z^n}{z^m} = z^{n-m}, \quad (z^n)^m = z^{nm}, \quad (z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n, \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n}.$$

Raíz cuadrada. Recordar que si $x \in \mathbb{R}$ y $x \geq 0$, entonces existe un único $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, tal que $y^2 = x$. En ese caso decimos que y es la *raíz cuadrada* de x y escribimos $y = \sqrt{x}$. Notar que los únicos números reales que pueden tener raíces cuadradas son los mayores o iguales que cero, dado que los números elevados al cuadrado son de esa forma.

Consideremos ahora la ecuación $x^2 = a$, con $a \geq 0$, en $\mathbb{R}$. Si escribimos $b = \sqrt{a}$, entonces

$$x^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - b)(x + b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm b.$$

Luego las soluciones de la ecuación $x^2 = a$, con $a \geq 0$, son $x = \pm\sqrt{a}$.

Notar que el razonamiento anterior también prueba que, dado $z_0 \in \mathbb{C}$, si existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z_0$, entonces las soluciones de la ecuación $x^2 = z_0$ son $\pm w$.

A continuación probaremos que todo número complejo tiene una raíz cuadrada.

[2] Recordar que el *valor absoluto* de un número real a se define por $|a| = a$ si $a \geq 0$ y $|a| = -a$, si $a < 0$.

Teorema 1. *Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$ y definimos $w \in \mathbb{C}$ mediante*

$$w = \sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + \sigma\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}\, i, \quad \sigma = \begin{cases} 1, & b \geq 0 \\ -1, & b < 0 \end{cases},$$

entonces $w^2 = z$.

Dem. La prueba consiste en calcular w^2 y ver que coincide con z.

$$w^2 = \left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + \sigma\sqrt{\frac{|z| - a}{2}} i\right)^2 = \frac{|z| + a}{2} - \frac{|z| - a}{2} + 2\sigma\sqrt{\left(\frac{|z| + a}{2}\right)\left(\frac{|z| - a}{2}\right)}\, i$$

$$= a + 2\sigma\sqrt{\frac{|z|^2 - a^2}{4}}\, i = a + \sigma\sqrt{a^2 + b^2 - a^2}\, i = a + \sigma\sqrt{b^2}\, i = a + \sigma|b|i = a + bi = z.$$

En la última igualdad usamos $\sigma|b| = b$, lo cual se deduce de la definición de σ. $\square$

Observación 2. Si en el teorema anterior consideramos $b = 0$, obtenemos que $w \in \mathbb{C}$ verifica $w^2 = a \in \mathbb{R}$ si y solo si $w = \begin{cases} \pm\sqrt{a}, & a \geq 0 \\ \pm\sqrt{|a|}\, i, & a < 0 \end{cases}$. Luego la ecuación $x^2 = a$, con $a < 0$, tiene solución en $\mathbb{C}$.

Observación 3. Lo que sigue es una explicación del origen de la fórmula para la raíz cuadrada.

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$ y supogamos que existe $w = x + yi$ tal que $w^2 = z$. Entonces

$$w^2 = z \quad \Leftrightarrow \quad (x + yi)^2 = a + bi \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 - y^2\right) + (2xy)i = a + bi \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = a \ \text{ y } \ 2xy = b.$$

Elevando estas dos últimas igualdades al cuadrado y luego sumándolas, obtenemos

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = a^2 \ \text{ y } \ 4x^2y^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 + b^2.$$

Luego $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. Como además vale $x^2 - y^2 = a$, obtenemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= |z| \\ x^2 - y^2 &= a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}(|z| + a) \quad \text{y} \quad y^2 = \frac{1}{2}(|z| - a)$$

lo cual implica

$$x = \pm\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} \quad \text{y} \quad y = \pm\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}.$$

Luego

$$w = x + yi = \pm\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} \pm \sqrt{\frac{|z| - a}{2}} i.$$

En resumen, si $w \in \mathbb{C}$ verifica $w^2 = z$, entonces $w = \pm u$, siendo

$$u = \sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + \sigma\sqrt{\frac{|z| - a}{2}} i, \quad \sigma = \pm 1.$$

Recíprocamente, si u es como arriba, entonces $u^2 = a + \sigma|b|i$. Luego

$$w^2 = z \quad \Leftrightarrow \quad a + \sigma|b|i = a + bi \quad \Leftrightarrow \quad \sigma|b| = b.$$

Para que valga esta última igualdad hay que elegir $\sigma = \begin{cases} 1, & b \geq 0 \\ -1, & b < 0 \end{cases}$.

Ejemplo 4. Buscamos encontrar $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 = 5 - 12i$. Con la notaciones anteriores es $a = 5$ y $b = -12$. Luego $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 13$ y $\sigma = -1$. Por lo tanto

$$\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} = \sqrt{\frac{13 + 5}{2}} = 3, \quad \sqrt{\frac{|z| - a}{2}} = \sqrt{\frac{13 - 5}{2}} = 2.$$

Entonces la solución de la ecuación $z^2 = 5 - 12i$ es $z = \pm(3 - 2i)$.

La exponencial compleja. Si $z = a + bi$, entonces definimos $e^z := e^a\big(\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b)\big)$. La motivación de esta definición requiere conocimientos más avanzados (series de potencias o ecuaciones diferenciales), por lo cual la omitiremos.

Observaciones 5.

1. Si $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, entonces e^z es la exponencial común de $\mathbb{R}$.
2. Si $z = a + bi$, entonces $|e^z| = e^a > 0$; luego $e^z \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
3. Tomando $z = i\pi$, obtenemos $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi) = -1$, lo cual equivale a
$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$
Esta fórmula es la *identidad de Euler*, que involucra a los números $e, i, \pi, 1, 0$.
4. Como las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π, entonces la exponencial compleja es periódica de período $2\pi i$, es decir
$$e^{z+2n\pi i} = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}.$$
Esta es una diferencia notable con la exponencial real.

En la prueba siguiente usaremos las fórmulas trigonométricas para el seno y el coseno de la suma:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta), \quad \mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta).$$

Proposición 6. *Vale* $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, *para todo* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Dem. Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$. Entonces $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$ y por lo tanto

$$e^{z_1+z_2} = e^{a_1+a_2}\big(\cos(b_1 + b_2) + i\,\mathrm{sen}(b_1 + b_2)\big).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{a_1}\big(\cos(b_1) + i\,\mathrm{sen}(b_1)\big) \cdot e^{a_2}\big(\cos(b_2) + i\,\mathrm{sen}(b_2)\big)\\
&= e^{a_1}e^{a_2}\big(\cos(b_1) + i\,\mathrm{sen}(b_1)\big) \cdot \big(\cos(b_2) + i\,\mathrm{sen}(b_2)\big)\\
&= e^{a_1+a_2}\Big(\cos(b_1)\cos(b_2) - \mathrm{sen}(b_1)\,\mathrm{sen}(b_2) + i\big(\cos(b_1)\,\mathrm{sen}(b_2) + \mathrm{sen}(b_1)\cos(b_2)\big)\Big)\\
&= e^{a_1+a_2}\big(\cos(b_1 + b_2) + i\,\mathrm{sen}(b_1 + b_2)\big). \quad \square
\end{aligned}$$

La siguiente proposición combina la exponencial con las potencias.

Proposición 7. *Vale* $(e^z)^n = e^{nz}$, *para todo* $z \in \mathbb{C}$ *y* $n \in \mathbb{Z}$.

Dem. Consideremos primero el caso $n \in \mathbb{N}$. La prueba es por inducción en n. Para $n = 0$ es evidente. Razonando inductivamente, asumiendo que la fórmula vale para n, obtenemos

$$(e^z)^{n+1} = (e^z)^n \cdot e^z = e^{nz} \cdot e^z = e^{nz+z} = e^{(n+1)z}.$$

Notar que en el penúltimo paso aplicamos la proposición anterior. Luego hemos probado que la fórmula vale para $n \in \mathbb{N}$. El caso de exponente negativo se deduce del anterior:

$$(e^z)^{-n} = \big((e^z)^n\big)^{-1} = (e^{nz})^{-1} = e^{-(nz)} = e^{(-n)z}. \quad \square$$

Aplicando esta proposición a $z = i\varphi$, con $\varphi \in \mathbb{R}$, se obtiene la fórmula de *De Moivre*

$$(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi), \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Proposición 8. *Si $z \neq 0$, entonces existe un único $\varphi \in [0, 2\pi)$ tal que $z = |z|e^{i\varphi}$.*

Dem. Sea $z = a + bi \neq 0$. Entonces $\frac{z}{|z|} = \frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}$. Si consideramos el punto $\left(\frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|}\right) \in \mathbb{R}^2$ correspondiente a $\frac{z}{|z|}$, sus coordenadas verifican

$$\left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{|z|^2} = 1.$$

Luego $\left(\frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|}\right)$ está en la circunferencia de radio 1 centrada en el origen y por lo tanto existe único $\varphi \in [0, 2\pi)$ tal que $\frac{a}{|z|} = \cos(\varphi)$ y $\frac{b}{|z|} = \mathrm{sen}(\varphi)$. Luego

$$z = a + bi = |z|\cos(\varphi) + |z|\,\mathrm{sen}(\varphi)\, i = |z|\big(\cos(\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\varphi)\big) = |z|e^{i\varphi}. \quad \square$$

Dado $z \neq 0$, la expresión $z = |z|e^{i\varphi}$ es la *representación polar* de z. El número $\varphi \in [0, 2\pi)$ se llama el *argumento principal* de z y mide el ángulo (en radianes) que forma la semirrecta que va del origen a z con el eje Ox. En general, dado $z \neq 0$, si $\varphi \in \mathbb{R}$ es tal $z = |z|e^{i\varphi}$, entonces decimos que φ es un *argumento* de z.

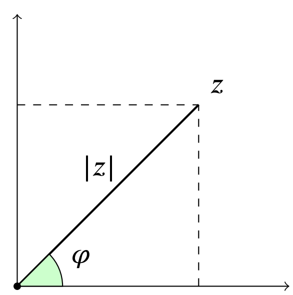

Figura 1: Representación polar

La proposición siguiente es útil al operar con la representación polar. En particular muestra que el argumento está determinado a menos de un múltiplo entero de 2π.

Proposición 9. *Dados $r, s, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$ con $r, s > 0$, es*

$$re^{i\varphi} = se^{i\psi} \quad \Leftrightarrow \quad r = s \quad \text{y} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \text{tal que } \psi = \varphi + 2k\pi.$$

Dem. Tomando módulos obtenemos

$$re^{i\varphi} = se^{i\psi} \ \Rightarrow\ \left|re^{i\varphi}\right| = \left|se^{i\psi}\right| \ \Rightarrow\ r\left|e^{i\varphi}\right| = s\left|e^{i\psi}\right| \ \Rightarrow\ r = s.$$

Luego cancelando r y s en $re^{i\varphi} = se^{i\psi}$, obtenemos

$$e^{i\varphi} = e^{i\psi} \ \Leftrightarrow\ \cos(\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\varphi) = \cos(\psi) + i\,\mathrm{sen}(\psi) \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \cos(\varphi) = \cos(\psi) \\ \mathrm{sen}(\varphi) = \mathrm{sen}(\psi) \end{cases} \ \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \text{tal que } \psi = \varphi + 2k\pi. \quad \square$$

Observación 10. La notación polar no es conveniente para la suma, pero sí lo es para el producto, ya que si $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\varphi_1}$, entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

El siguiente resultado prueba que todo número complejo no nulo tiene exactamente n raíces n-ésimas.

Teorema 11. *Si $0 \neq z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces la ecuación $w^n = z$ tiene exactamente n soluciones.*

Dem. Supongamos $z = re^{i\varphi}$, con $r > 0$ y $\varphi \in \mathbb{R}$. Sea $w = se^{i\psi}$, con $s > 0$ y $\psi \in \mathbb{R}$. Entonces

$$w^n = \left(se^{i\psi}\right)^n = s^n \left(e^{i\psi}\right)^n = s^n e^{in\psi}.$$

Luego

$$\begin{aligned} w^n = z &\Leftrightarrow s^n e^{in\psi} = re^{i\varphi} \\ &\Leftrightarrow s^n = r \quad \text{y} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } n\psi = \varphi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow s = \sqrt[n]{r} \quad \text{y} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

El cálculo anterior muestra que $w \in \mathbb{C}$ verifica $w^n = z$ si y solo si existe algún $k \in \mathbb{Z}$ tal que $w = w_k$, siendo

$$w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta_k}, \quad \theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Observar que si consideramos los argumentos θ_k obtenemos

$$\theta_{k+1} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} = \theta_k + \frac{2\pi}{n}.$$

Así que cada uno de estos ángulos difiere del anterior en $\frac{2\pi}{n}$. Eso implica que $w_0, \ w_1, \ \dots, \ w_{n-1}$ forman los vértices de un polígono regular de n lados. Además vemos que para los otros valores de k, los w_k empiezan a repetirse

$$w_n = w_0, \quad w_{n+1} = w_1, \quad w_{n+2} = w_2, \quad \cdots \quad \text{y} \quad w_{-1} = w_{n-1}, \quad w_{-2} = w_{n-2}, \quad \cdots$$

Así que las soluciones de la ecuación $w^n = z$ son $w_0, \ w_1, \ \dots, \ w_{n-1}$. □

Observación 12. Si en $\mathbb{C}$ consideramos la ecuación $x^n = 1$, entonces el teorema anterior nos dice que sus soluciones son $w_0, \dots, w_{n-1}$, siendo

$$w_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Como ya vimos, si se grafican esas soluciones en el plano, se obtienen los vértices de un polígono regular de n lados. Por ejemplo, si consideramos la ecuación $x^3 = 1$, sabemos que 1 es solución de la misma. Dividiendo $x^3 - 1$ por $x - 1$ obtenemos $x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$. Si buscamos las raíces del segundo factor obtenemos

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}.$$

Luego las tres raíces de la ecuación $x^3 = 1$ son $x = 1$ y $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$. Si se grafican los puntos correspondientes $(1, 0)$ y $\left(\frac{-1}{2}, \ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ se ve que forman un triángulo equilátero. Si ahora consideramos la ecuación $x^4 = 1$, obtenemos

$$x^4 - 1 = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$$

Luego las raíces de $x^4 = 1$, son ± 1 y $\pm i$, que forman los vértices de un cuadrado en $\mathbb{R}^2$.

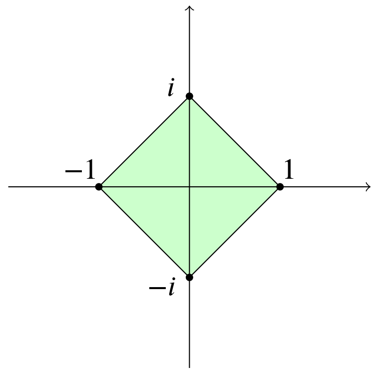

Figura 2: Soluciones de $z^4 = 1$

Polinomios. Una de las propiedades importantes de $\mathbb{C}$ es que vale el *teorema fundamental del álgebra*, que dice que si consideramos un polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ y $n \geq 1$, entonces $p(x)$ tiene al menos una raíz, es decir, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ al que $p(z_0) = 0$. Su prueba excede el nivel de estas notas y no la veremos. Notar que si z_0 es una raíz de $p(x)$, entonces existe un polinomio $q(x)$ tal que $p(x) = (x - z_0)q(x)$. Usando esto y razonando inductivamente se prueba que en $\mathbb{C}$ todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, contadas con su orden de multiplicidad; es decir, si $p(x)$ es un polinomio de grado n, entonces existen complejos $z_1, \ldots, z_k$ y naturales $m_1, \ldots, m_k$ tales que $p(x) = (x - z_1)^{m_1} \cdots (x - z_k)^{m_k}$ y $m_1 + \cdots + m_k = n$. Notar que el teorema anterior da una prueba del teorema fundamental para el caso particular de un polinomio de la forma $p(x) = x^n - a$, con $n \geq 1$ y $a \in \mathbb{C}$.