

## Medida:

1

Un rectángulo  $R$  en  $\mathbb{R}^d$  es un conjunto de la forma

$$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$$

Definimos  $|R| = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$

Un rectángulo  $Q$  es un cubo si  $b_i - a_i = l \quad \forall i$   
de lado  $l$

$$\Rightarrow |Q| = l^d.$$

Una ~~serie~~ <sup>flia</sup> de rectángulos  $\{R_i\}$  se dice canónicamente disjunta

$$\text{si } \forall i \neq j \quad R_i \cap R_j = \emptyset$$

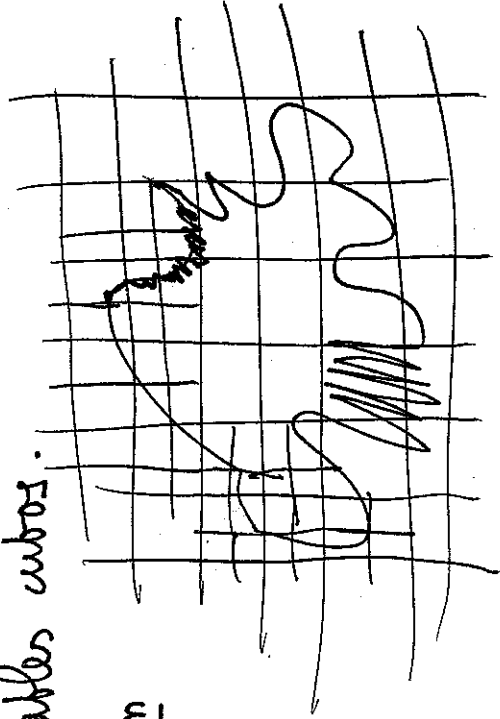
Prop: Si  $R$  es un rectángulo  $R$  es unión canónicamente disjunta de rectángulos  $R = \bigcup_{i=1}^N R_i \Rightarrow |R| = \sum_{i=1}^N |R_i|.$

dem: Ejercicio. (Nota, integral de Riemann) ...

Similantemente, si  $R \subseteq \bigcup_{i=1}^N R_i \Rightarrow |R| \leq \sum_{i=1}^N |R_i|$

Obs: Todo abierto  $O$  de  $\mathbb{R}^d$  es unión canónicamente disjunta de numerables cubos.

dem



Dado  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  definimos:

$$m_*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, Q_j \text{ cubros} \right\}$$

↖ si fueran finitos, es la definición de Riemann... (muchos problemas)  
↖ e.g.  $\mathbb{Q} \cap [0,1]$  con finitos mide 1.

Entonces  $0 \leq m_*(E) \leq \infty$ .

Nota:  $m_*(\mathbb{R}) = |\mathbb{R}|$

dem:  $m_*(\mathbb{R}) \leq |\mathbb{R}|$  al menos para  $\mathbb{R}$  cubo es obvio, sino cubrir  $\mathbb{R}$  por cubos a menos de  $\epsilon \dots$

$|\mathbb{R}| \leq m_*(\mathbb{R})$  por la propiedad de antes (y compacidad...) //

Propiedades:

0:  $m_*(\emptyset) = 0, m_*(\mathbb{R}^d) = \infty$ .

1: (Monotonidad)  $E_1 \subseteq E_2 ; m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$

2: (Subaditividad) Si  $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow m_*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_*(E_i)$   
( $\epsilon$ -room...)

3: ~~Subaditividad~~ (Abiertos) Si  $E \subseteq \mathbb{R}^d \Rightarrow m_*(E) = \inf \{ m_*(O) : E \subseteq O \}$

lem:  $m_*(E) \leq \inf m_*(O)$  por monot.

Para la otra, sea  $\epsilon > 0$  y  $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$  con

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(Q_i) + \epsilon/2$$

Tomamos cubos abiertos  $\hat{Q}_i \supseteq Q_i$  con  $|\hat{Q}_i| \leq |Q_i| + \epsilon/2^{i+1}$

$$\Rightarrow O = \bigcup \hat{Q}_i \supseteq E \quad \text{y} \quad m_*(O) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{Q}_j| \leq m_*(E) + \epsilon.$$

3  
4. Si  $E = E_1 \cup E_2$  con  $d(E_1, E_2) > 0$

$$\Rightarrow m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$$

demo:  $m_*(E) \leq m_*(E_1) + m_*(E_2)$  ok.

Fijamos  $\delta > 0$  tq  $d(E_1, E_2) > \delta$

Fijamos  $\varepsilon > \delta$ .  $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$  cubos cerrados tq  $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| < m_*(E) + \varepsilon$ .

Podemos subdividir los cubos y suponer  $\text{diam } Q_i < \delta/10 \forall i$

Si  $J_1 = \{i \text{ tq } Q_i \cap E_1 \neq \emptyset\} \Rightarrow J_1 \cap J_2 = \emptyset$

$J_2 = \{i \text{ tq } Q_i \cap E_2 \neq \emptyset\}$   $|Q_j|$

$$E_j \subseteq \bigcup_{j \in J_1} Q_j \Rightarrow m_*(E_j) \leq \sum_{j \in J_1} m_*(Q_j)$$

$\Rightarrow$  ok.

5. (Medida de abiertos bien def)

Si  $E$  es union numerable de cubos casi disjuntos  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$

$$\Rightarrow m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \quad (\text{en part, vale para abiertos})$$

Fijamos  $\varepsilon > 0$  y tomamos  $\hat{Q}_i \subseteq \text{int } Q_i$  con  $|\hat{Q}_i| > |Q_i| - \varepsilon/2^i$

$\Rightarrow$  aplicamos 4 inductivo y tenemos

$$m_*(E) \geq \left| \sum_{j=1}^N |Q_j| \right| - \varepsilon \quad \forall N, \varepsilon \Rightarrow m_*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$$

Por la subaditividad tenemos la otra desigualdad  $\Rightarrow$  ok.

Def:  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  es medible Lebesgue si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{O}$  abierto

$$\text{con } E \subseteq \mathcal{O} \text{ tq } m_*(\mathcal{O} \setminus E) < \varepsilon.$$

En este caso, denotamos  $m(E) = m_*(E)$ .

Propiedades:

1. Abiertos son medibles.
2. Si  $m_*(E) = 0 \Rightarrow E$  es medible
3. Unión numerable de medibles es medible (ε-room)
4. Cerrados son medibles

4.1 Alcanza compacto<sup>K</sup> (cerrados son unión numerable de compactos)

4.2 Sea  $\mathcal{O} \supseteq K$  tq  $m_*(\mathcal{O}) \leq m_*(K) + \varepsilon$

$\Rightarrow \mathcal{O} \setminus K$  es abierto y lo escribimos  $\mathcal{O} \setminus K = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$

Para N-fijo  $\bigcup_{i=1}^N Q_i = C_N$  es compacto  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} d(C_N, K) > 0 &\Rightarrow m_*(\mathcal{O}) \stackrel{\text{monot.}}{\geq} m_*(K) + m_*(C_N) \\ &= m_*(K) + m_*(C_N) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^N m_*(Q_j) \leq m_*(\mathcal{O}) - m_*(K) < \varepsilon \quad \forall N$$

$$\Rightarrow m_*(\mathcal{O} \setminus K) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) < \varepsilon.$$

5. (COMPLEMENTOS) Si  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  medible  $\Rightarrow E^c \text{ t.b.}$

dem:  $O_n \supseteq E \text{ t.q. } m_*(O_n \setminus E) < 1/n.$

Tomamos  $S = \bigcup_m O_m^c \subseteq E^c$

Observamos que  $E^c = S \cup \underbrace{E^c \setminus S}_\uparrow$

$\uparrow$   
unión fin de  
cerrados  
 $\downarrow$   
medible

$$m_*(E^c \setminus S) \leq m_*(\bigcup_m^* O_m \setminus E) \forall m.$$

6. (Intersecciones numerables)

Leyes de de Morgan.

con medida finita

COROLARIO:  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  medible  $\Rightarrow \forall \epsilon > 0$

$\exists K \subseteq E \subseteq O$  con  $K$  compacto y  $O$  abierto tal que

$$m(O \setminus K) < \epsilon. \text{ (en part } m(K) + \epsilon \geq m(E) \geq m(O) - \epsilon)$$

También es obvio que  $\forall E \subseteq \mathbb{R}^d$  medible y  $\epsilon > 0$

existe una unión finita de cubos  $F \subseteq \mathbb{R}^d \text{ t.q.}$

$$m(E \Delta F) < \epsilon. \quad (E \Delta F = E \setminus F \cup F \setminus E)$$

Teorema (Aditividad) Sean  $\{E_i\}_{i \geq 1}$  medibles disjuntos 2 a 2

$$\Rightarrow m(\bigcup_i E_i) = \sum_i m(E_i)$$

dem: Podemos suponer todos miden finito  $\Rightarrow$  tomamos  $\epsilon > 0$

y compactos en  $E_i$  con  $m(K_i) > m(E_i) - \epsilon/2^i$

$$\sum_{i=1}^N m(E_i) \leq m(E)$$

Para cualquier  $N > 0$  obtenemos que

Propiedad conveniente  $E_1, \dots, E_n$  — medibles de  $\mathbb{R}^d$

- (i) Si  $E_n \uparrow E$  ( $E_m \subseteq E_{m+1} \forall m$  y  $E = \bigcup_m E_m$ )  $\Rightarrow m(E) = \lim_m m(E_m)$
- (ii) Si  $E_n \downarrow E$  ( $E_m \supseteq E_{m+1} \forall m$  y  $E = \bigcap_m E_m$ ) y  $m(E_1) < \infty$  para algún  $n \Rightarrow m(E) = \lim_{m \rightarrow \infty} m(E_m)$

dem: ejercicio. Hazer contraej de (ii) si  $m(E_m) = \infty \forall m$ .

Propiedades de invariancia:

1. Por traslaciones es fácil.
2. ~~Tranf~~ Transf lineales diagonales, es fácil que se mult. por determinante.  $\rightarrow$  Riemann.
3. Rotaciones ( $SO_n(\mathbb{R})$ ): Opciones:  $\rightarrow$  Ponerte ganas....

CONJUNTO NO MEDIBLE: (VITALI)  $\leftarrow$  (todo E.V. tiene base, pensar en  $\mathbb{R}$  como  $\mathbb{Q}$ -e.v.)

Consideramos  $\sim$  en  $[0,1]$  dado por  $x \sim y$  si  $x-y \in \mathbb{Q}$ .

Ej:  $\sim$  es rel. de equiv.

Elegimos  $N \subseteq [0,1]$  un conjunto tq tiene 1 punto de cada clase de equivalencia. (Ax. de elección.)  $\leftarrow$  e.g. hacemos un buen orden en  $[0,1]$  y tomamos el menor de cada clase.

Tenemos que  $\forall q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$   $N \cap N+q = \emptyset$ .

Se cumple  $m_*(N) = m_*(N+q)$   $\leftarrow [0,1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} N+q \subseteq [0,2]$

Si  $N$  medible  $\Rightarrow m(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} N+q) \in [1,2]$

por otro lado  $m(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} N+q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} m(N) = \begin{cases} 0 & \text{si} \\ \infty & \text{si} \end{cases}$

# FUNCIÓNES MEDIBLES

Denotamos  $\mathcal{L} = \{E \subseteq \mathbb{R}^d : E \text{ es medible}\}$  (es  $\sigma$ -álgebra, no importa por ahora...)

$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \bar{\mathbb{R}}$  es medible si

$\forall a \in \mathbb{R}$  vale que:

$$f^{-1}([-\infty, a]) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < a\} \in \mathcal{L}.$$

(idem  $f: E \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  con  $E \in \mathcal{L}$ )

Notación  $f^{-1}([-\infty, a]) = \{f < a\}$ . (idem otras notaciones)

Obs:  $f$  medible  $\Leftrightarrow \forall O \subseteq \bar{\mathbb{R}}$  abiertos,  $f^{-1}(O) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall F \subseteq \bar{\mathbb{R}}$  cerrado,  $f^{-1}(F) \in \mathcal{L} \dots$

e.g.  $\{f \leq a\} = \bigcap_{n>0} \{f < a + \frac{1}{n}\}$ ,  $\{f < a\} = \bigcup_n \{f \leq a - \frac{1}{n}\}$

$$\{f \geq a\} = \{f < a\}^c, \text{ etc...} //$$

Obs 2: Composición es un poco más delicado: Si  $f$  medible y  $\Phi$  continua  $\Rightarrow \Phi \circ f$  es medible, pero  $f \circ \Phi$  no necesariamente...  
Borel-Lebesgue vs Borel-Borel o Lebesgue-Lebesgue.

Propiedad: Si  $\{f_n\}$  son funciones medibles  $\rightarrow$

- (i)  $\sup_n f_n$ , (ii)  $\inf_n f_n$  (iii)  $\limsup_n f_n$  (iv)  $\liminf_n f_n$  t.b.  $(\Rightarrow$  cuando  $\lim$  existe, t.b.)

dem:  $\{\sup f_n > a\} = \bigcup_n \{f_n > a\}$

$$\limsup f_n = \inf_k \sup_{n>k} f_n \dots //$$

Prop 2: Las operaciones OK: Si  $f, g$  medibles  
(composición NO)

(vamos a suponer  
siempre que

$$m(f^{-1}(\pm\infty)) = 0)$$

$\Rightarrow$  (i)  $f \cdot g$  (ii)  $f + g$  son medibles

$$\text{dem: } \{f+g > a\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{f > a - q\} \cap \{g > q\}$$

$$f \cdot g = \frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2] \quad \text{como si } f \text{ y } g \text{ medible } \varphi^2 \text{ medible}$$

(se puede ver fácil)

queda.

CONCLUSION: Las funciones medibles son un álgebra.

$$\text{Decimos que } f = g \text{ c.t.p.} \Leftrightarrow m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

Si  $f$  medible y  $f = g$  c.t.p.  $\Rightarrow g$  es medible  $\Rightarrow$  todo lo anterior  
vale c.t.p.

Ejemplo importante: Si  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  definimos  $\chi_E : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \text{medible} \Leftrightarrow E \text{ medible}$$

Funciones simples:  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  se dice simple si

$\exists E_1, \dots, E_k$  medibles disjuntos <sup>2a2</sup> y números  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$   
(acotados)

$$f(x) = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{E_i}$$

Ejercicio: Si  $f(x) = \sum_{i=1}^k b_i \chi_{F_i}$  con  $b_i \in \mathbb{R}$  y  $F_i$  medibles  
 $\Rightarrow f$  es simple. //



9

Teorema (aproximación por simples)  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  medible.

Existe sucesión  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0}$  sucesión creciente de simples no-negativas tq

$$\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x) \quad \forall x \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x) \quad \forall x.$$

dem: Sea  $f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > k \\ k & \text{si } |x| \leq k \text{ y } |f(x)| \geq k \\ f(x) & \text{si no.} \end{cases}$

Entonces,  $f_k \rightarrow f$  en t.p. (incluso si  $f$  pudiese valer  $+\infty$ )

Tomamos  ~~$\varphi_k(x) = \frac{f_k(x)}{k}$~~   $\varphi_k(x) = \lfloor \frac{f_k(x) \cdot k}{k} \rfloor$  quizás cambian  $k$  por  $2^k$

Entonces  $|\varphi_k(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Con lo cual  $\varphi_k(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$  (el tiempo depende de la convergencia de  $f_k$  a  $f$ )

Por otro lado,  ~~$\varphi_{k+1}(x) \geq \varphi_k(x)$~~   $\varphi_{k+1}(x) \geq \varphi_k(x) \leftarrow$  (usa que es  $2^k$ )  
si no hay pequeño  $\delta$

Obs: Podemos adaptar para que si  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ~~es~~ medible  $\Rightarrow$

$\exists \{\varphi_k\}$  simples con  $|\varphi_k| \leq |\varphi_{k+1}|$  tq  $\varphi_k \rightarrow f$  en t.p. (puntualmate)

Teorema (aproximación por escalones)  $\forall f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  medible existe

$\{\psi_n\}$  funciones escalon tq  $\psi_n \rightarrow f$  ~~lab~~ ~~ctp~~.

dem: Basta aproximar  $f = \chi_E$  con  $E$  medible.

Tomamos  $F_n$  unión finita de cubos tq  $m(E \Delta F_n) < \frac{1}{n}$

y definimos  $\psi_n = \chi_{F_n}$ . Tomamos  $\psi_n \rightarrow \chi_E$   $\rightarrow$  el error es sumable...

## Los 3 principios de Littlewood

10

- (i) Todo conjunto es "casi" una unión finita de cubos.
- (ii) Toda función es "casi" continua.
- (iii) Toda sucesión convergente de funciones es "casi" uniformemente convergente.  
(c.t.p)

Para (i), mostramos

Prop:  $\forall E \subseteq \mathbb{R}^d$  medible con  $m(E) < \infty$  ~~esta~~  $\forall \varepsilon > 0 \exists F = \bigcup_{i=1}^N Q_i$   
unión disjunta de cubos tq  $m(E \Delta F) < \varepsilon$ .

Es práctico mostrar (ii) usando (ii) usando (iii) (aunque se puede hacer directo)

Teorema (Egorov (iii)) Sea  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  funciones de  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  medible con  $m(E) < \infty$  tq  $f_k \rightarrow f$  m-ctp en  $E$ . Entonces,  $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \subseteq E$  compacto con  $m(E \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$  tq  $f_k \rightarrow f$  uniformemente en  $A_\varepsilon$ .

lem: Sin pérdida de generalidad suponemos  $f_k(x) \rightarrow f(x) \forall x \in E$  (sacando conj de medida 0)

Para todo  $\eta, k > 0 \quad E_k^m = \{x \in E / |f_j(x) - f(x)| < 1/m \forall j > k\}$

Fijado  $n$ , tenemos  $E_k^m \subseteq E_{k+1}^m$  y  $E_k^m \nearrow E \Rightarrow \forall m > 0 \exists k_m$  tq

$m(E \setminus E_{k_m}^m) < 1/2^m$ .

Sea  $N > 0$  tq  $\sum_{n=N}^{\infty} 1/2^n < \varepsilon/2$  y  $\tilde{A}_\varepsilon = \bigcap_{n \geq N} E_{k_n}^m$

Entonces  $m(E \setminus \tilde{A}_\varepsilon) \leq \sum_{n=N}^{\infty} m(E \setminus E_{k_n}^m) < \varepsilon/2$

Dado  $\delta > 0$ , sea  $n \geq N$  tq  $1/n < \delta \Rightarrow$  como  $\tilde{A}_\varepsilon \subseteq E_{k_n}^m$  tenemos que si

$j > k_n \Rightarrow |f_j(x) - f(x)| < \delta \forall x \in \tilde{A}_\varepsilon$  y tenemos la convergencia uniforme.

Luego,  $A_\varepsilon \subseteq \tilde{A}_\varepsilon$  compacto tq  $m(A_\varepsilon \setminus \tilde{A}_\varepsilon) < \varepsilon/2$  ya lo hicimos. //

Teorema (Lusin (ii)) Sea  $f: E \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  medible con  $m(E) < \infty$ .  
 Entonces,  $\forall \epsilon > 0 \exists F_\epsilon \subseteq E$  compacto con  $m(E \setminus F_\epsilon) \leq \epsilon$  tal que  $f|_{F_\epsilon}$  es continua.

OTO: No estamos diciendo que  $f$  es continua en los puntos de  $F_\epsilon$ !  
 (Sin embargo, se puede probar como ejercicio desafiante, que  $\exists g$  continua que coincide con  $f$  en  $F_\epsilon$ ).

dem: Sean  $\{f_n\}$  funciones escalón  $f_n \rightarrow f$  m-ctp.

Podemos encontrar  $E_n$  tq  $m(E_n) < \frac{1}{2}^n$  y  $f_n$  es continua fuera de  $E_n$

Tomamos  $A_{\epsilon/3}$  por Egorov donde  $f_n \rightarrow f$  y  $m(E \setminus A_{\epsilon/3}) < \epsilon/3$

Sea  $N > 0$  tq  $\sum_{n>N} \frac{1}{2}^n < \epsilon/3$  y  $F' = A_{\epsilon/3} \setminus \bigcup_{n>N} E_n$

$\Rightarrow$  por conv. unif de continuas ...

Ahora  $F_\epsilon \subseteq F'$  compacto ...

"Prueba del Ejercicio" Lo hacemos para  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  medible y acotada.

1ero Aproximamos  $f$  por continuas m-ctp.

$f_n \rightarrow f$  m-ctp funciones escalón,  $g_k^n \rightarrow f_n$  continuas m-ctp

2do: Dado  $\epsilon > 0$   $\exists g$  continua tq  $f - g$  es menor que  $\epsilon$  en un conjunto cuyo complemento mide  $\delta > 0$  y tq  $|g| \leq \sup |f(x)| + \epsilon$ . menor que  $\delta$ .

3ero  $f = g_1 + f_1$  con  $g_1$  continua y  $|f_1| < \frac{1}{2}$  en  $E_1$  tq  $m(E \setminus E_1) < \epsilon/2$ .

$f_1 = g_2 + f_2$  con  $g_2$  continua y  $|f_2| < \frac{1}{4}$  en  $E_2$  tq  $m(E_1 \setminus E_2) < \epsilon/4$   
 ... Si miramos  $\sum g_n$  converge unif. a  $f$  en  $E \setminus E_m$

$$A+B = \{x \in \mathbb{R}^d : x = x' + x'' \text{ con } x' \in A, x'' \in B\}$$

Ejemplo: Es posible que  $m(A) = m(B) = 0$  pero  $m(A+B) > 0$ . ejemplo, conjunto de cantor usual

Teorema: Si  $A, B, A+B \subseteq \mathbb{R}^d$  son medibles  $\Rightarrow m(A+B)^{1/d} \geq m(A)^{1/d} + m(B)^{1/d}$

Intuición: Si  $A$  es convexo  $\Rightarrow A + \lambda A = (1+\lambda)A$

(pues  $\nexists$  si  $x = x' + \lambda x''$  con  $x', x'' \in A \Rightarrow \exists y \in [x', x'']$  tq  $x = (1+\lambda)y$ .)  
 $(1+\lambda) \cdot \left(\frac{x'}{1+\lambda} + \frac{\lambda x''}{1+\lambda}\right)$

Notar que en  $\mathbb{R}^d$   $m(\eta \cdot A) = \eta^d \cdot m(A)$  ( $\eta^d = \det$  de homotecia)

Como  $(a+b)^x \geq a^x + b^x$  siempre que  $x \geq 1, a, b > 0$ . (trivial para  $x$  entero por binomio de Newton) sino, integrando.

la desigualdad es al revés si  $x \leq 1$

Por la "intuición" queda  $(1+\lambda)^{dx} \geq 1 + \lambda^{dx}$  (notar que queremos el menor  $\alpha$  posible...)

esto se cumple si  $\alpha \geq 1/d$  (y es falso sino)

ya que  $(a+b)^x \geq a^x + b^x$  si  $x \geq 1$

$\Rightarrow$  es sharp si o si. Considerando  $B = \{x_0\}$  vemos implica que si vale para  $\alpha$ , vale para los mayores.

que la constante sharp  $\leq m(A+B)^\alpha \geq c_\alpha m(A)^\alpha + m(B)^\alpha$

es  $c_\alpha = 1$ . Esto dice que el enunciado es el "mejor posible".

dem: Primero para rectángulo  $A$  y  $B$  con lados de long  $\{a_i\}_{i=1}^d$  y  $\{b_i\}_{i=1}^d$  resp.

Podemos suponer, haciendo homotecias a  $A$  y  $B$  (que sale lo mismo de ambos lados de la misma razón.

que  $a_i b_i = 1 \forall i$ . Reemplazamos  $a_i, b_i$  por  $d_i a_i, d_i b_i \Rightarrow$  ambos lados de la igualdad se multiplican por  $(d_1 \dots d_d)^{1/d}$ .

Notar ahora que si  $x_i$  son números positivos  $\Rightarrow$  la media aritmética es mayor que la geométrica  $\Rightarrow$

$$\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d a_i \geq \left( \prod_{i=1}^d a_i \right)^{1/d} \quad \text{y} \quad \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d b_i \geq \left( \prod_{i=1}^d b_i \right)^{1/d}$$

que sumando da

$$1 \geq \left( \prod_{i=1}^d a_i \right)^{1/d} + \left( \prod_{i=1}^d b_i \right)^{1/d}$$

$$\parallel$$

$$m(A+B)^{1/d} \parallel m(A)^{1/d} + m(B)^{1/d}$$

$\uparrow$   
 aca usamos que la suma de rectángulos es rectángulo con lados = suma de lados

Ahora; A y B son uniones de rectángulos casi-disjuntos.

Se hace por inducción en el número de rectángulos con algún truco aducto (pag 37)

Dp  $\Rightarrow$  se pasa a abiertos y luego a medibles en geral.

(ver libro x detalles)

## INTEGRAL DE LEBESGUE (RECORDAR APROXIMACIÓN X SIMPLES)

tanto por abajo, como en módulo

Primer paso: Funciones simples:  $\varphi = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{E_i}$  con  $a_i$  dist. 2 a 2 y  $E_i$  disjuntos

$$\Rightarrow \int \varphi \, dm = \sum_{i=1}^k a_i m(E_i) \quad (\text{notación } \int \varphi \, dm = \int \varphi \chi_{E \, dm})$$

Propiedades: (1) Lineal:  $\int a\varphi + b\psi = a \int \varphi + b \int \psi$

(2) Aditiva en dominio:  $\int \varphi = \int \varphi + \int \varphi \quad \text{si } E \cap F = \emptyset$

(3) Monotonía: Si  $\varphi \leq \psi \Rightarrow \int \varphi \leq \int \psi$

(4) Desigualdad triangular:  $|\int \varphi| \leq \int |\varphi|$

dem: La clave es que la integral no depende del representante.

Si definimos en general para  $\varphi = \sum a_i \chi_{E_i}$   $\int \varphi = \sum a_i m(E_i)$

indep que  $a_i$  son distintos y/o  $E_i$  disjuntos

Hay que ver que si  $\varphi = \sum a_i \chi_{E_i} = \sum b_j \chi_{F_j} \Rightarrow \sum a_i m(E_i) = \sum b_j m(F_j)$

Pero para eso, vemos que  $\varphi = \sum_{i,j} a_i \chi_{E_i \cap F_j}$  (pues en  $E_i \cap F_j$   $a_i = b_j$ )

y  $m(E_i) = \sum_j m(E_i \cap F_j)$  pq son iguales. (esto si  $E_i$  y  $F_j$  son 2 o 2 disj.)

etc...

El resto es inmediato.

Paso dos Funciones acotadas de soporte acotado

$\text{sop}(f) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}$  medible si  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  medible.

Suponemos que  $m(\text{sop}(f)) < \infty$  y que  $|f(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{R}^d$  y  $M > 0$ .

Entonces,  $\exists \varphi_n \rightarrow f$  en todo punto y  $\forall \varphi_n | \varphi_n | \leq M \forall n, x$ .

Lema: Sea  $f$  medible y acotada y sea  $\varphi_n$  simples unif. acotadas  $\forall \varphi_n \rightarrow f$  m-ctp, entonces:

(i) existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n$  (ii) Si  $f = 0$  m-ctp  $\Rightarrow \lim \int \varphi_n = 0$

Obs: El punto (ii) y la linealidad dan que el límite está bien definido

y podemos definir  $\int f = \lim \int \varphi_n$ .

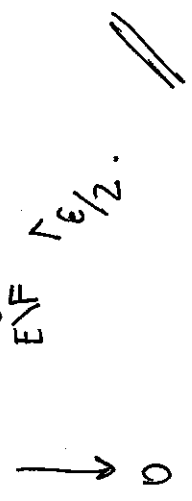
Tb lo podríamos hacer considerando  $\varphi_n, \varphi_n' \rightarrow f$  y considerando la sucesión "alternada" y la parte (i).

dem: Usamos Egorov.

Fijamos  $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists F \subseteq E$  compacto con  $m(E \setminus F) < \frac{\epsilon}{2M} \leftarrow \max_{1 \leq i \leq n} |f_n(x)|$

tg  $\varphi_n \Rightarrow f$  en  $F$ .

$$\text{Ahora } \left| \int \varphi_n - \int \varphi_m \right| \leq \int | \varphi_n - \varphi_m | = \int_F | \varphi_n - \varphi_m | + \int_{E \setminus F} | \varphi_n - \varphi_m |$$



Propiedades  $f, g$  acotadas medibles y soporte de medida finita  $\Rightarrow$

(i) Lineal  $\int (af + bg) = a \int f + b \int g$ .

(ii) Aditiva  $\int f = \int f + \int f$  si  $E \cap F = \emptyset$ .

(iii) Monótona si  $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ .

(iv) Desig. triangular:  $|\int f| \leq \int |f|$ .

dem: Por definición.

Teorema (Convergencia acotada) Sea  $\{f_n\}$  medibles unif. acotadas y soportadas en  $E$  con  $m(E) < \infty$  tg  $f_n \rightarrow f$  m-ctp.

Entonces  $\int |f_n - f| dm \rightarrow 0$  (en particular  $\int f_n \rightarrow \int f$ )

$\lim \int f_n = \int \lim f_n$

dem: Egorov, usando las propiedades de ahí.

Obs importante: Si  $f \geq 0$  y  $\int_E f = 0 \Rightarrow f = 0$  m-ctp en  $E$ .

(sino,  $\exists \epsilon > 0$  tg  $f > \epsilon$  en  $E_n \Rightarrow \frac{1}{m} \chi_{E_n} \leq f$ .)  
y  $E_n$  con  $m(E_n) > 0$

# Funciones Riemann integrables: Acabamos de ver que las integrables

Riemann son medibles y las integrales coinciden.

Además, las integrables Lebesgue (al menos acotadas de sup-acotado) son cerradas por límites puntuales, incluso ctp.

## PASO 3 Funciones no negativas

$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  medible

definimos  $\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int g \, d\mu : g \leq f \text{ medible, acotada de soporte acotado (e de medida finita)} \right\}$

Decimos que  $f$  es integrable si  $\int f \, d\mu < \infty$

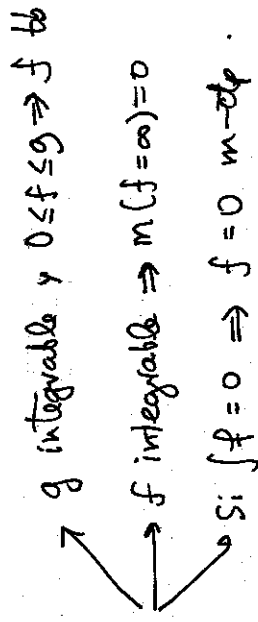
Propiedades: Sean  $f, g$  medibles no negativas:

(i)  $\int (af + bg) = a \int f + b \int g \quad \forall a, b \geq 0.$

(ii)  $\int f = \int_E f + \int_{E^c} f$

(iii)  $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g.$

(iv) triangular no tiene sentido acá; pero



lem: Hay que probar (i) (esto obvio)

Mult. por escalares es obvio  $\Rightarrow$  miramos  $\int f + g = \sup \left\{ \int \varphi : \varphi \leq f + g, \dots \right\}$

Sean  $\varphi \leq f, \psi \leq g \Rightarrow \varphi + \psi \leq f + g \Rightarrow \int \varphi + \int \psi \leq \int f + \int g.$

Para la otra, fijamos  $\varepsilon$  y  $\eta_1 \leq f + g$  tq  $\int \eta_1 \leq \int f + \int g - \varepsilon$

Sea  $\eta_1 = \min\{f, \eta\}$  y  $\eta_2 = \min\{g, \eta\}$

$$\begin{aligned} \int \eta_1 &\leq \int f + \int \eta_2 \\ &\leq \int f + \int g - \varepsilon \end{aligned}$$



Ejemplo peligroso  $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int f_n = 1 \quad \forall n \text{ pero } \int \lim f_n = 0.$$

Teorema (Lema de Fatou)  $\{f_n\}$  medibles no negativas y sea  $f = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$   
Entonces  $\int f \leq \liminf \int f_n$ .

dem: Tomando  $\hat{f}_n = \inf_{k \geq n} f_k$  tenemos que  $\hat{f}_n \rightarrow f$  m.c.t.p.

Por otro lado,  $\int \hat{f}_n \leq \int f_n \Rightarrow 0 \leq \int f_n \Rightarrow 0 \leq \int f$ .

Sea  $0 \leq g \leq f$  acotada sup. acot.  $\forall \epsilon \int g \geq \int f - \epsilon$ .

$$\text{Si } g_n = \min\{g, \hat{f}_n\} \Rightarrow g_n \rightarrow g \text{ m.c.t.p.}$$

$$\Rightarrow \int g_n \rightarrow \int g \quad (\text{conv. acotada})$$

$$g_n \leq \hat{f}_n \Rightarrow \int g \leq \int \hat{f}_n \leq \liminf \int f_n. \quad \forall \epsilon \Rightarrow 0 \leq \int f - \epsilon.$$

Corolario (Convergencia Monótona) Si  $f_n \leq f \quad \forall n$  (funciones medibles y positivas)  
 $\Rightarrow$  y  $f_n \rightarrow f$  m.c.t.p.  $\Rightarrow \lim \int f_n = \int f$ .  
(en part, si  $f_n \nearrow f \Rightarrow$  vale eso)

Ejemplo:  $f_n = -\frac{1}{n} \Rightarrow \int f_n = -\infty \quad \forall n$  pero  $\int \lim f_n = 0$ .

Corolario en funciones medibles  $\geq 0 \Rightarrow \int \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int a_n(x) dm(x)$ .

ÚLTIMO PASO

Primero  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  medible  $\Rightarrow$

$$f = f^+ - f^- \text{ con } f^+ = \max\{f, 0\} \quad f^- = \max\{-f, 0\}$$

~~Demostremos que~~ Si  $f^+$  o  $f^-$  son integrables, ~~entonces~~

$$\int f \, d\mu = \int f^+ - \int f^- \quad \begin{matrix} f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2 \\ \Rightarrow f_1 + g_2 = g_1 + f_2 \Rightarrow \int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2 \\ \Rightarrow \text{OK.} \\ \Downarrow \\ \text{de aditividad} \end{matrix}$$

(Nota: Si  $f = g - h$  con  $g \geq 0$  y  $h \geq 0 \Rightarrow$  la integral da lo mismo y una de las dos integr.

Def:  $f$  es integrable si  $|f| = f^+ + f^-$  lo es. ( $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mu)$ )  $\leftarrow$  (def. mod 0)

[Prop: Lineal, aditiva, monótona y cumple deriv  $\Delta$ .

Prop: Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mu) \Rightarrow \forall \epsilon > 0$ :

(1)  $\exists B \subseteq \mathbb{R}^d$  de medida finita tq  $\int_B |f| < \epsilon$  (de hecho, B puede ser  $B(0, N)$  para  $N$  suf. gde.)

(2)  $\exists \delta > 0$  tq  $\int_E |f| < \epsilon$  si  $m(E) < \delta$ . (CONTINUIDAD ABSOLUTA)

dem: (1) Suponemos  $f \geq 0 \Rightarrow$  por aditividad  $\int_{B(0, N) \setminus B(0, N)}$   $f$  es serie convergente.

(2)  $f_N = \min\{f(x), N\} \Rightarrow f_N \uparrow f \Rightarrow \exists E_N$  tq  $\int_{\mathbb{R}^d \setminus E_N} f - f_N \leq \epsilon/2$ .

Ahora  $\delta < \epsilon/4N \Rightarrow$  si  $m(E) < \delta$

~~$\int_E f = \int_E f_N + \int_{E \setminus E_N} f$~~

TEOREMA (CONVERGENCIA DOMINADA)

Sea  $\{f_n\}$  medibles con  $f_n \rightarrow f$  m.d.p. y tq  $|f_n| \leq g$  con  $g \in L^1(\mathbb{R}^d, m)$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n| dm \rightarrow 0 \quad (\text{en particular } \int f_n \rightarrow \int f.)$$

dem:  $\forall N > 0 \quad E_N = \{x: |x| \leq N \text{ y } g(x) \leq N\}$

$$\forall \epsilon > 0 \exists A \quad \exists N \text{ tq } \int_{E_N^c} g dm < \epsilon/4$$

En  $E_N$ ,  $f_n$  están todas acotadas por  $N$

$$\Rightarrow \int_{E_N} |f_n - f| < \epsilon/2 \quad \text{si } n \text{ es gde.}$$

$$\Rightarrow \int |f_n - f| = \int_{E_N} |f_n - f| + \int_{E_N^c} |f_n - f| \leq \int_{E_N} |f_n - f| + 2 \int_{E_N^c} g \leq \epsilon$$

si n gde.  $\downarrow$

~~Nota:~~ Si  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u(x) + i v(x)$

decimos  $f \in L^1(\mathbb{R}^d, m)$  si  $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$  es integrable

$$\text{y } \int f = \int u + i \int v.$$

Como  $|f + g| \leq |f| + |g|$  tenemos que  $L^1(\mathbb{R}^d, m)$  es e.v.

tanto en  $\mathbb{C}$  como en  $\mathbb{R}$ .

Definimos una norma:  $\|f\| = \|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} |f| dm$

Si miramos las funciones medibles, esto no es una norma pues no cumple que  $\|f\| = 0 \iff f \equiv 0$  (el resto de las prop. es fácil)

Para eso, notamos que  $\hat{O} = \{f \text{ medible e integrable} : \|f\| = 0\}$  es un subespacio y formalmente definimos  $L^1(\mathbb{R}^d, m) = \hat{O} \backslash \{0\}$ .

En el cociente,  $\|\cdot\|$  sí es una norma. (Side remark: convergencia c.t.p. es como top prod No metrizable si quiera)

Teorema:  $L^1(\mathbb{R}^d, m)$  es completo para  $\|\cdot\|$  (i.e. es un espacio de Banach)

dem:  $\{f_n\}$  cauchy para  $\|\cdot\|$ . Problema, encontramos candidato a límite.

Truco principal, consideren subsecuon  $\{f_{n_k}\}$  tq  $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^1} < 2^{-k}$ .

Tomamos  $f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$  que a priori no sabemos

enté definida m-ctp

(si no converge, hacemos que valga 0)

Sea  $g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$

Por convergencia monótona tenemos que  $\int g < \infty \implies g < \infty$  m-ctp

$\implies f$  bien definida m-ctp (pues series convergen absolutamente)

Ademas  ~~$\forall \epsilon > 0 \exists N$~~   $\implies$  por convergencia dominada

$|f_{n_1} + \sum_{k=1}^N f_{n_{k+1}} - f_{n_N}| \leq g \forall N$  tenemos que  $f$  es límite de

$f_{n_k}$  en  $L^1 \implies$  es límite de  $f_{n_k}$   $\implies$

Consecuencia: Si  $f_n \rightarrow f$  en  $L^1 \implies$  subsecuon que converge c.t.p.

Si  $f_n \rightarrow f$  ctp + dominada  $\implies$  converge en  $L^1$ .

Ej: Simple, escalones y continuos de soporte compacto son densos en  $L^1$ .

## Convergencia en medida

21

$$f_n \rightarrow f \text{ en medida si } \forall \varepsilon > 0 \quad m(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \xrightarrow{n} 0$$

Ejercicio:  $f_n \rightarrow f$  en medida  $\Rightarrow \exists$  subsecuon que converge m-ctp.

$f_n \rightarrow f$  m-ctp  $\Rightarrow$  converge en medida.

notar que soporte de todas las medidas es finita

Mostrar los contraejemplos.

$f_n \rightarrow f$  en medida o m-ctp  $\Rightarrow$  converge en  $L^1$  y dominada

## DIGRESION MENOR SOBRE ESPACIOS $L^p$ EN GRAL

Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado, completo para la norma.

CRITERIO ABSTRACTO Un espacio vectorial normado  $V$  es de Banach si y solo si  $\left[ \forall \{a_n\} \subseteq V \text{ tq } \sum_n \|a_n\| < \infty \quad \exists a \in V \text{ tq } \sum_{n=1}^N a_n \xrightarrow{N} a. \right]$

dem: ( $\Rightarrow$ ) Obvio pues  $\sum_{n=1}^N a_n$  es de Cauchy.

( $\Leftarrow$ ) Si  $\{a_n\}$  de Cauchy  $\Rightarrow$  tiene subsecuon tq  $\|a_{n_k+1} - a_{n_k}\| < 1/2^k$

$\Rightarrow \mathcal{S}_{m_j} = a_1 + \sum_{j=1}^{m-1} a_{j+1} - a_{n_j}$  es convergente pues  $\sum_{j=1}^{\infty} \|a_{n_{j+1}} - a_{n_j}\| < \infty$ .

Ejemplo de Espacio de Banach:  $C^0(X)$   $\leftarrow$  las continuas de un e.m. compacto con

$$\|f\|_0 = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

• Espacios  $\mathcal{L}^p$  con  $1 \leq p \leq \infty$  es  $\mathcal{L}^p = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones complejas (o reales)

$$\text{tq } \|a\|_p = \left( \sum_n |a_n|^p \right)^{1/p} < \infty \quad (\|a\|_\infty = \sup |a_n|)$$

(el  $1/p$  afuera es por que sea norma)

En  $\mathcal{L}^\infty$  hay subespacios cerrados:  $C = \{ \text{sucesiones con límite} \}$   $C_0 = \{ \text{sucesiones con límite } 0 \}$

Dibujan las bolas en  $\mathbb{R}^n$ , ver las diferencias.

$\hat{?}$   $\mathcal{L}^2$  es el unico Hilbert?

Dado un conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  y  $1 \leq p \leq \infty$  definimos

$$L^p(E, dx) = \{ f : E \rightarrow \mathbb{C} \text{ (o } \mathbb{R}) \text{ medibles t.q. } \int_E |f|^p < \infty \} / \{ f = g \text{ m.c.d.} \}$$

Definimos 
$$\|f\|_p = \left( \int_E |f|^p \right)^{1/p}$$

o 
$$\|f\|_\infty = \inf \{ M : |f(x)| \leq M \text{ m.c.d.} \}$$

Es una norma (no trivial para  $1 < p < \infty$ )

Teorema (desigualdad de Minkowski)  $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ . Para  $1 < p < \infty$  la igualdad se verifica si y solo si  $f$  y  $g$  son colineales.

dem: Suponemos primero que  $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$

queremos ver que  $\|tf + (1-t)g\|_p \leq 1 \quad \forall t \in (0,1)$

pero 
$$\int |tf + (1-t)g|^p \stackrel{\text{convexidad}}{\leq} \int t|f|^p + (1-t)|g|^p \leq 1$$

(si  $p > 1$  la desigualdad es estricta)

Ahora, si  $f$  y  $g$  son cualquiera

$$\Rightarrow \hat{f} = \frac{f}{\|f\|_p} \text{ y } \hat{g} = \frac{g}{\|g\|_p} \Rightarrow \frac{f+g}{\|f\|_p + \|g\|_p} = \hat{f} \cdot \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} + \hat{g} \cdot \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}$$

y se obtiene lo deseado. //

Obs: Si  $m(E) < \infty \Rightarrow L^\infty(E) \subseteq L^p(E) \subseteq L^q(E) \subseteq L^1(E)$

si  $\infty > p > q > 1$ .

Si  $m(E) = \infty$  ninguna inclusión.

(Ancho vs. Alto)

Por otro lado  $L^1(\mathbb{N}) \subseteq L^p \subseteq L^q \subseteq L^\infty$ .

Teorema Para todo  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L^p(E)$  es un espacio de Banach.

dem: Ya vimos que es un e.v. normado

Sea  $\{f_n\}$  t.q.  $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_p < \infty$

Minkowski + conv. monótona

Sea  $F(x) = \sum_{n \geq 0} |f_n(x)| \Rightarrow \|F\|_p \leq \sum_{n \geq 0} \|f_n\|_p < \infty$

$\Rightarrow F \in L^p$  y es finita m-ctp

$\Rightarrow f = \sum f_n$  tb es finita m-ctp pues  $|f(x)| \leq F(x)$

Por otra parte  $\|f - \sum_{n=0}^N f_n\|_p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_p \rightarrow 0$

Obs: Las funciones simples son densas en  $L^p(E)$  con  $1 \leq p < \infty$ .  
*resolución, continuas, suaves* ← comentar como se simplifica ahora.

En  $L^\infty$  solo las simples si  $m(E) < \infty$ . Sino, ~~no~~ las ~~no~~ continuas son un cerrado.

Se cumple que se pueden distinguir via los "duales":

[ Thm (Riesz) Si  $p \neq \infty$  y  $q$  es t.q.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (i.e. si  $p=1 \Rightarrow q=\infty$ )  
Entonces  $(L^p)^* \cong L^q$

←  $L^0$  con  $1 < p < \infty$  (pues son reflexivos)  
Esto permite distinguir  $L^1$  de  $L^2$  ... pero  $L^p$  de  $L^q$  hay que trabajar un poco más

Espacios de Hilbert son todos iguales...

Sea  $d = d_1 + d_2$  con  $d_1, d_2 \geq 1$

Escribimos  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$  y escribimos  $(x, y) \in \mathbb{R}^d$  con  $x \in \mathbb{R}^{d_1}$   
 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$

Para  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ , definimos, para  $y \in \mathbb{R}^{d_2}$  la función

$$f^y: \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad f^y(x) = f(x, y).$$

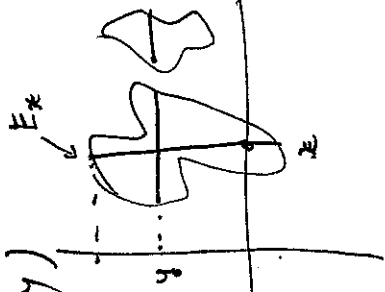
Nota: No tiene pq estar definida ya que  $m(\mathbb{R}^{d_1} \times \{y\}) = 0$ .  
 si  $f$  está definida c.t.p.

Definimos análogamente  $f_x: \mathbb{R}^{d_2} \rightarrow \mathbb{C} \quad / \quad f_x(y) = f(x, y)$

Para conjuntos (o func. características) definimos

$$E^y = \{x : (x, y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$$

$$E_x = \{y : (x, y) \in E\} \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$$



Teorema (Fubini) Supongamos  $f: \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \rightarrow \mathbb{C}$  es integrable (en part. medible)

entonces, para casi todo  $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ :

(i)  $f^y$  es integrable en  $\mathbb{R}^{d_1}$

(ii) La función  $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dm_1(x)$  es integrable en  $\mathbb{R}^{d_2}$

Y de hecho, se cumple que:

$$(iii) \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dm_1(x) \right) dm_2(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dm(x, y)$$

(Obviamente, el teo es simétrico en  $x$  e  $y$  ...)



dem: Lo más difícil es mostrar que las funciones características

verifican el teorema, luego, es cuestión de tomar funciones simples y pasar al límite. Nota, no vamos a trabajar en  $L^1$  a priori, eso queda pronto a posteriori.

Paro 1: Las características de cubos verifican el teorema.

(lo mismo rectángulos, en particular, bordes de cubos)

dem: Trivial, si se quiere, aplicar cálculo 2. //

Para mejorar la eficiencia de la prueba, consideramos  $\mathcal{F} = \{f \text{ tq vale el teorema}\}$

Acabamos de ver que  $\mathcal{F}$  contiene las características de los cubos.

Paro 2:  $\mathcal{F}$  es cerrado por combinaciones lineales.

dem: La función  $(\alpha f + g)^y = \alpha f^y + g^y \Rightarrow$  todo camino. //

Podemos todo el tiempo pensar que  $f$  va a  $\mathbb{R}$  (dps tomamos parte real e imag)

Paro 3: Si  $f_n \nearrow f$  y  $f_n \in \mathcal{F}$  ~~simple~~  $\Rightarrow f \in \mathcal{F}$ . (similar  $f_n \searrow f$ )

dem: Podemos suponer  $f_n \geq 0$  reemplazando por  $f_n - f_1 \nearrow f - f_1$

Por cada  $n$ , tenemos  $A_n$  de medida 0 tq afuera  $f_n^y$  es integrable (en part. medible)

Si  $y \notin \cup A_n \Rightarrow f_n^y \nearrow f^y$  medible e integrable (podría integrar  $\infty$ )

Per TCM).

Por otro lado  $f_n \nearrow f \Rightarrow \int f_n \nearrow \int f$  (TCM)

Si  $g_n(y) = \int f_n^y dx \Rightarrow g_n \nearrow g = \int f^y$  (TCM)

Como  $\int g_n(y) dy = \int f_n$  tenemos que  $\int g_n^y \rightarrow \int g^y$  (TCM)  $\rightarrow \int f$

Entonces completamos esto. Si  $f$  es integrable  $\Rightarrow$  todo es finito y lista.

(Nota: si  $f$  es positiva e integra  $\infty$ , este arg. tb da info) //

Paso 4: Las características de abiertos pertenecen a  $\mathcal{F}$ .

dem: Los abiertos son unión casi-disjunta de cubos.  $O = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} Q_i$

Los bordes de los cubos tb pertenecen a  $\mathcal{F} \Rightarrow$  las sumas parciales están en  $\mathcal{F}$

y crecen a  $\chi_O \Rightarrow$  TCM. y listo.  
(o el paso anterior)

Paso 5: Si  $E$  tiene medida finita y es intersección de abiertos  $\Rightarrow \chi_E \in \mathcal{F}$ .  
(numerable)

dem:  $E = \bigcap_{n \geq 1} O_n$  (podemos suponer  $m(O_1) < \infty$  tomando un abierto de medida finita que contenga a  $E$ )

Entonces,  $\chi_{\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n} \leq \chi_{O_1}$  y son integrables  $\Rightarrow \chi_E \in \mathcal{F}$ .

Paso 6: Si  $m(E) = 0 \Rightarrow \chi_E \in \mathcal{F}$ .

dem: Tomamos  $O_n \supseteq E$  tq  $m(O_n) < 1/n \Rightarrow G = \bigcap_n O_n \supseteq E$

y  $G$  mide 0. Como es int. de abiertos,  $\chi_G \in \mathcal{F}$ . Por otro lado

$0 \leq \chi_E \leq \chi_G \Rightarrow \chi_E$  integra 0 para  $m_2$ -top y...

Paso 7: Para todo  $E$  medible,  $\chi_E \in \mathcal{F}$ .  
con medida finita.

dem: Sea  $O_n \supseteq E$  tq  $m(O_n - E) < 1/n \Rightarrow G = \bigcap O_n \supseteq E$

y se cumple  $m(G \setminus E) = 0$ , entonces  $\chi_G$  y  $\chi_{G-E} \in \mathcal{F}$

y  $\chi_E = \chi_G - \chi_{G-E}$

Paso final: Toda  $f$  integrable.

dem: por linealidad, podemos suponer  $f \geq 0$ . Aproximamos por simples que están en  $\mathcal{F}$  y listo.

De hecho, la prueba da el siguiente teorema que a veces es útil para usar el otro (aplicándolo a  $|f|$ )

Teorema (Tonelli) Sea  $f: \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  medible  $\Rightarrow$  para  $m_2$ -c.t.p y

vale que: (i)  $f^y$  es medible en  $\mathbb{R}^{d_1}$

(ii)  $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dx \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  es medible en  $\mathbb{R}^{d_2}$

y se cumple que: (iii)  $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left( \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^{d_1+d_2}} f$  (donde el valor puede ser  $+\infty$ )

## DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  medible  $\in L^1(\mathbb{R}^d, dm)$  definida  $m$ -c.t.p.

¿Podemos conocer el valor de  $f$ ?

Prop: Sea  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  continua  $\rightarrow f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) dm(y)$

dem: Una función continua es constante a pequeña escala. //

¿Será que algo parecido ocurre para  $f \in L^1$  cualquiera? Obviamente solo puede dar info  $m$ -c.t.p. (Idea obvia; usar Lebesgue...)

Dificultad: Interacción de parte de continuidad y no continuidad. En definitiva, las bolas tienen una componente geométrica. (Recordar conjunto que mide positivo y complemento tb en toda bola.)

Para controlar el "error" se usa la llamada "desigualdad maximal"

Son desigualdades 'a priori' que permiten luego obtener lo deseado.

La función maximal de Hardy-Littlewood:

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dm)$ , definimos:

$$f^*(x) = \sup_{\substack{B \text{ bola} \\ x \in B}} \left\{ \frac{1}{m(B)} \int_B |f| dy \right\} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^d$$

Nota: En las bolas se juega la geometría. Es claro que alguna restricción hay que poner (sino  $f^*$  sería constante!), luego discutiremos cuales tienen sentido.

Teorema:  $f^*$  es medible ~~en todo punto~~ y cumple:  $f^* < \infty$  m-c.p.

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \quad \forall \alpha > 0$$

(donde A se puede elegir como  $3^d$ )

Nota: Esperamos que en general (m-c.p) vale  $f^* \geq |f|$ . Lo que dice el teorema es que no es mucho más grande. (Aunque no prueba que  $\int f^* < \infty$  !!)

dem:  $f^*$  medible es fácil: ~~La integral~~  $\{f^* > \alpha\}$  es de hecho abierto. (es supremo)   
 La ~~integral~~ <sup>finitud de  $f^*$</sup>  va a ser consecuencia de la desigualdad pues

$$\{f^* = \infty\} \subseteq \{f^* > \alpha\} \quad \forall \alpha \Rightarrow m(\{f^* = \infty\}) \leq m(\{f^* > n\}) \rightarrow 0.$$

Lema (Cubrimiento 1) Sea  $\mathcal{B} = \{B_{11}, \dots, B_{N1}\}$  colección de bolas en  $\mathbb{R}^d$  entonces,  $\exists$  subcolección de bolas disjuntas  $B_{i_1}, \dots, B_{i_k} \in \mathcal{B}$  tal que:

$$m\left(\bigcup_{k=1}^N B_k\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}) = 3^d m\left(\bigcup_{j=1}^k B_{i_j}\right)$$

dem: Argumento codicioso:

Se basa en la siguiente observación sencilla: Si radio  $B' \leq$  radio  $B$   $\wedge$   $B \cap B' \neq \emptyset \Rightarrow B' \subseteq 3B$  (bola de igual centro y 3 veces el radio)

Entonces, tomamos  $B_{i_1}$  como una bola de  $\mathcal{B}$  de radio maximal.

Luego  $B_{i_2}$  como de radio maximal dentro de las que no cortan  $B_{i_1}$  ...

y  $B_{i_j}$  como la de radio maximal dentro de las que no cortan  $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_{j-1}}\}$ .

El proceso se acaba por ser  $\mathcal{B}$  finita.

Por la observación inicial,  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq \bigcup_{j=1}^k 3B_{i_j}$  que da lo deseado.  $\parallel$   
( $m(3B) = 3^d m(B)$ )

Ahora podemos mostrar el teorema:

Sea  $x \in \{f^* > \alpha\} \Rightarrow \exists B_x$  bola que contiene a  $x$  tal que

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| dm(y) > \alpha$$

$$\Rightarrow m(B_x) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)| dm(y) \leq \frac{\|f\|_1}{\alpha}$$

Sea  $K \subseteq \{f^* > \alpha\}$  compacto ~~no~~ cualquiera  $\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{x \in \{f^* > \alpha\}} B_x$  (obvio)

$\Rightarrow$  hay subcubrimiento finito y por lema de cubrimiento vemos que  $\{B_{x_j}\}$  <sup>disjuntas</sup>

$$m(K) \leq 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{x_j}) \leq \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^k \int_{B_{x_j}} |f(y)| dm(y) =$$

$$= \frac{3^d}{\alpha} \int_{\bigcup B_{x_j}} |f(y)| dm(y) \leq \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_1 \cdot \text{Esto es indep del compacto}$$

$\Rightarrow$  OK.  $\square$

## Teorema (Diferenciación de Lebesgue)

Si  $f$  es integrable en  $\mathbb{R}^d$ , entonces

$$\lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dm(y) = f(x) \quad \text{para m-ctp } x.$$

dem: Sea  $h(x) = \limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dm(y) - f(x) \right|$

que es medible y  $\geq 0$ . Entonces, alcanza un valor que

$$m(\{h > \alpha\}) = 0 \quad \forall \alpha > 0. \quad \text{Fijamos entonces } \alpha > 0.$$

Tomamos  $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$  funciones continuas de soporte compacto.

Sabemos que  $\forall n$ ,  $\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B g_n(y) dm(y) = g_n(x) \quad \forall x.$

Escribimos (sumando y restando  $g_n(x)$ )

$$\frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dm(y) - f(x) = \frac{1}{m(B)} \int_B (f(y) - g_n(y)) dm(y) + \frac{1}{m(B)} \int_B g_n(y) dm(y) - g_n(x)$$

$$+ g_n(x) - f(x)$$

Entonces,  $h(x) \leq (f - g_n)^*(x) + |g_n(x) - f(x)|$

func. maximal.

Por H-L:  $m(A_\alpha) < \frac{\delta}{\alpha} \|f\|_1$

$\Rightarrow \{h > \alpha\} \subseteq \{(f - g_n)^* > \alpha\} \cup \{|g_n - f| > \alpha\}$   
 $A_\alpha \quad B_\alpha.$

## Algunos comentarios/consecuencias:

31

1) Vale para  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, dm)$  (i.e.  $\forall x \in \mathbb{R}^d \exists B_x$  bola  $\tau_x$  pues es resultado local.  $\nexists \chi_{B_x} \in L^1$ )

2) Vale para conjuntos que "se achican regularmente"

$\{U_\alpha\} \rightarrow x$  regularmente si  $\text{diam } U_\alpha \rightarrow 0$

$U_\alpha \rightarrow x$

- $m(U_\alpha) > c m(B)$  con  $B$  bola centrada en  $x$  que contiene a  $U_\alpha$ . ( $c$  indep de  $\alpha$ )

3) No vale para cualquier conjunto: (hay ejemplo concreto en el práctico, pero

explicar el fenómeno)  $\leftarrow$  e.g. homeos que llenan conj de medida 0 en  $\mathbb{R}^d$ .  
aunque esto no da el asunto. Conjuntos de Nikodym, Bases de Vitali, etc.

4) Se deduce un corolario muy interesante por sí mismo:

Teorema (densidad de Lebesgue) Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  medible  $\Rightarrow$

Casi todo punto de  $E$  es de densidad

Si  $\{U_\alpha\} \rightarrow x$  regular

$$\Rightarrow \frac{m(E \cap U_\alpha)}{m(U_\alpha)} \rightarrow 1$$

no hay conjuntos "equiprobables"

se puede demostrar directamente. La dens de H-L. es crucial en part. cuando  $f$  es no acotada. Si  $E$  medible y  $F$  unión de cubos que aproximan, queda claro con vol(E)  $\approx$  vol(F)

# DIFERENCIACIÓN EN $\mathbb{R}$

Hay funciones que no son derivables en ningún punto, se pueden construir abstracta o (continuas)

bastante concretamente. (ver práctico).

Así como vimos que  $\forall f \in L^1$  se cumple que  $\frac{d}{dt} \int f = f$  (Teo de dif de Lebesgue), queremos el análogo de  $f = \int f'$ , pero por las consideraciones encima, esto es más delicado.

Vamos a introducir las funciones de variación acotada.

Motivación: ¿Cómo se define la "longitud de una curva"? ¿Qué pasa si da  $\infty$ ?

Esto es un poco análogo, pues  $\int \sqrt{1+f'^2} dt$  da la "longitud" del gráfico de  $f$ ... cual es la clase natural de funciones donde esto tiene sentido.

El concepto de rectificabilidad es pertinente (dice que el gráfico tiene long. bien definida)

↕  
Variación acotada

Sea  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ , si  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  es una partición,

definimos  $Var\{F, \{t_0, \dots, t_N\}\} = \sum_{j=1}^N |F(t_j) - F(t_{j-1})|$

y  $Var(F) = \sup_{a=t_0 < \dots < t_N=b} \sum_{j=1}^N |F(t_j) - F(t_{j-1})| \in [0, +\infty]$ .

Decimos que  $F$  es de variación acotada si  $Var(F) < \infty$ .

tienen variación = 0.

Obs:  $Var$  es una norma en el e.v. de funciones de variación acotada / constantes

(ejercicio: demostrar esto; ¿es completa?)

• Variación acotada no implica continua (ej: calcular  $Var(X_{[0,1]})$ )

• Si pensamos en  $F$  como la parametrización de una curva en  $\mathbb{C} \text{ o } \mathbb{R}^2$  tenemos que la curva es rectificable  $\Leftrightarrow F$  es de variación acotada.



Prop: Sea  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  no decreciente (i.e.  $t \leq s \Rightarrow F(t) \leq F(s)$ )

entonces  $\text{Var}(F) = F(b) - F(a)$  (si es no-creciente  $\Rightarrow \text{Var } F = F(a) - F(b)$ )

dem: Ejercicio; para toda partición da igual. //

Prop: Si  $F = \int_a^t f(s) ds$  con  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{C}}$  integrable  
 $\Rightarrow F$  es de variación acotada y  $\text{Var } F = \int_a^b |f| = \|f\|_1$ .

dem: No lo vamos a usar todavía  $\Rightarrow$  ejercicio. //  
(que es variación acotada es fácil.)

La propiedad clave de las funciones de variación acotada es:

Teorema:  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es de variación acotada si y solo si  $\exists F^{\uparrow}$  y  $F^{\downarrow}$  funciones

no-decrecientes +  $F = F^{\uparrow} - F^{\downarrow}$ . (caso complejo es análogo con partes real e imaginaria)

dem ( $\Leftarrow$ ) Obvio.

$(\Rightarrow)$  Definimos  $F^{\uparrow}(x) = \left[ \sup_{a=t_0 < \dots < t_N = x} \sum_{j=1}^N \max\{F(t_j) - F(t_{j-1}), 0\} \right] + F(a)$

y  $F^{\downarrow}(x) = \sup_{a=t_0 < \dots < t_N = x} \sum_{j=1}^N \max\{- (F(t_j) - F(t_{j-1})), 0\}$

Ambos son obviamente no decrecientes.

Afirmamos que  $F(x) = F^{\uparrow}(x) - F^{\downarrow}(x)$ ; para esto basta notar que un refinamiento de la partición hace crecer las cantidades en ambos supremos, entonces, fijando

$\varepsilon > 0$ , tomamos partición común que se acerque al supremo a menos de  $\varepsilon$  y

cuando los sumamos queda la igualdad (a menos del  $2\varepsilon$ ) por una

suma telescópica que cancela los términos //

Nota:  $\boxed{\text{Var}(F) = F^{\uparrow}(b) + F^{\downarrow}(b) - F(a)}$   $\leftarrow$  ejercicio

Teorema: Sea  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (\text{ o } \mathbb{C})$  de variación acotada  $\Rightarrow$   
 $F$  es derivable m-ctp. ~~es derivable en casi todos los puntos~~

Por el Teorema anterior, esto se deduce del siguiente Teorema (que tiene más información):

Teorema (\*): Sea  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  no-decreciente y entonces  $F$  es derivable m-ctp y se cumple que  $\int_a^b F' \leq F(b) - F(a)$  (en particular, con derivada  $\geq 0$ )  $F' \in L^1([a, b])$

Nota: Este es uno de los teoremas más profundos del curso!

- Función de Cantor muestra que la desigualdad puede ser estricta (en ese caso  $F' \equiv 0$  m-ctp)

podría ser el nombre de Vitali  
 "cubrimiento de Vitali"  
 enunciados solo en  $\mathbb{R}$

Vamos a usar un refinamiento del lema de cubrimiento de Vitali: (vale en  $\mathbb{R}^d$ , pero lo enunciaremos solo en  $\mathbb{R}$ )

Teorema (Vitali) Sea  $E \subseteq \mathbb{R}$  de medida finita y positiva y sea  $\mathcal{O}$  un cubrimiento por intervalos de  $E$  tq: para todo  $x \in E$  y  $r > 0 \exists I \in \mathcal{O}$  tq  $I \subseteq (x-r, x+r)$ . Entonces,  $\forall \epsilon > 0 \exists$  colección finita  $\{I_1, \dots, I_N\}$  de intervalos disjuntos  $m(E \Delta \bigcup_{i=1}^N I_i) < \epsilon$ .

dem: Escribamos  $K \subseteq E \subseteq \mathcal{O}$  con  $K$  compacto,  $\mathcal{O}$  abierto y  $m(\mathcal{O} \setminus K) < \epsilon/10$ . Eliminando intervalos de  $\mathcal{B}$  tenemos que es cubrimiento de  $K$  de forma tal que todo intervalo está contenido en  $\mathcal{O}$ .

~~Tomamos cubrimiento abierto de  $K$  por intervalos disjuntos arbitrarios  $m(K)$ . Siendo  $\mathcal{B}$  intervalos tenemos un nuevo compacto  $K_1 \subseteq K$  tal que  $K_1$  cubre a  $K$  que si es un cubrimiento de  $K$  por intervalos disjuntos. Podemos ordenar los intervalos de  $\mathcal{B}$  en orden decreciente de longitud (podemos suponer sin pérdida de gen de  $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ ) y aplicar el algoritmo inductivamente; o bien en finitos pasos cubrimos  $K$ , o bien continua para siempre. Afirmo que la unión de los intervalos~~

con los extremos agregados cubre a  $K$ . ~~pues  $\mathcal{B}$  no~~

Notar que como  $\mathcal{B} = \{I_n\}$  sabemos que la longitud tiende a 0 entonces, si hubiese un punto fuera de la unión, como ~~se sabe~~ esta en algún intervalo de  $\mathcal{B}$  con cierta longitud y disjunta de la unión de los escogidos, lo tendríamos que haber elegido antes  $\Rightarrow$  absurdo.

CONCLUSIÓN  $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  (mod 0)  $\subseteq \bigcup I_n \in \mathcal{B}$ .

Entonces, una suma finita cubre a menos de  $\epsilon$ .  $\parallel$

Demostración de (\*):  $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  no-decreciente.

Para  $I = (x,y) \subseteq [a,b]$  definimos  $D(I) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

Notar primero que  $F$  tiene a lo sumo numerables puntos de discontinuidad.

Suponemos primero que  $F$  es continua entonces y consideramos

$$E = \{x \in (a,b) : F' \text{ no existe}\} \quad \left( \text{Recordar: } F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right)$$

contamos  $F' = \infty$  como ~~no~~ existir  
notar que  $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geq 0 \quad \forall h > 0$

~~Notar que  $F'$  no existe en  $E$~~

$$E = \bigcup_{r < s} E_{rs} \quad \text{con } r, s \in \mathbb{Q} \quad \text{y} \quad E_{rs} = \{x : \exists \epsilon \in I; \exists j, k \text{ y } D(I_j) < r < s < D(I_k)\}$$

$\leftarrow$  cubrimientos de Vitali  
por  $I_i$  y  $J_j$

Afirmación:  $m(E_{rs}) = 0 \quad \forall r < s$ .

dem: Vamos a mostrar que  $s \cdot m(E_{rs}) \leq m(F(E_{rs})) \leq r \cdot m(E_{rs})$

que implica lo deseado pues  $s > r$ .  $\leftarrow$  (como en el Teorema)

~~Por~~ Tenemos un cubrimiento de Vitali de  $E_{rs}$  por intervalos  $I$  tq  $D(I) < r$ . Consideramos  $\epsilon > 0$  y unión finita tq  $m(E_{rs} \setminus \bigcup_{i=1}^N I_i) < \epsilon$

$$\Rightarrow m(E_{rs}) + \epsilon > \sum_{i=1}^N m(I_i)$$

Aplicamos (esto es crucial) Vitali al cubrimiento por  $J_i$  en  $E_{rs} \cap \bigcup_{i=1}^N I_i \Rightarrow$

Obtenemos union disjunta de  $J$ 's contenidos en  $\bigcup_{i=1}^N I_i$  de forma que

$$\sum_{j=1}^{N'} m(J_j) > m(E_{rs}) - 2\varepsilon.$$

Por definición, obtenemos  $D(J) \geq \varepsilon$ .

$$\sum_{j=1}^{N'} m(J_j) \leq \sum_{j=1}^{N'} m(F(J_j)) \leq \sum_{j=1}^{N'} m(F(I_i)) \leq r \sum_{i=1}^N m(I_i) \leq r D(I) \leq r$$

$$\text{Obtenemos } \frac{m(E_{rs}) - 2\varepsilon}{m(E_{rs}) + \varepsilon} \leq \frac{\sum_{j=1}^{N'} m(J_j)}{\sum_{i=1}^N m(I_i)} \leq \frac{r}{s} < 1 \quad \forall \varepsilon$$

$$\Rightarrow m(E_{rs}) = 0.$$

De esto deducimos que  $m(E) = 0 \Rightarrow F'$  existe m-ctp. (puede ser  $\infty$ )

Por otra parte, un argumento similar da que  $F' < \infty$  m-ctp

(pues por Vitali, dado  $\varepsilon > 0$ , si miramos  $E_N = \{x : F'(x) > N\}$

y  $N\varepsilon > F(b) - F(a)$  vemos que  $m(E_N) < \varepsilon \dots$ )

Para ver que vale la desigualdad, usamos Fatoú.  $\swarrow$  definimos  $F(x) = F(b)$  si  $x > b$ .

Acabamos de ver que  $F_n = [F(x + 1/n) - F(x)]n \rightarrow F'$  m-ctp.

$$\Rightarrow \lim \int F_n \geq \int F' \quad \text{y} \quad \int F_n = n \left[ \int_a^{b+1/n} F(x+1/n) - \int_a^{b+1/n} F(x) \right] = n \left[ \int_b^{b+1/n} F(x) - \int_a^a F(x) \right]$$

$$= F(b) - n \int_a^{b+1/n} F(x) dx \leq F(b) - F(a)$$

$\swarrow$  no decreciente

[Falta tratar los numerales saltos: tienen medida 0 y no afectan al resto.]

## CONTINUIDAD ABSOLUTA

con 1 intervalo  
es la continuidad uniforme.

37

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  es absolutamente continua si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$

de forma tal que si  $(a_i, b_i)$  son tales que  $\sum (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$

$\forall \epsilon \exists \delta \forall \eta$   
cumple que

(Nota: Es a priori un poco más fuerte que decir que si  $E \subseteq [a,b]$  cumple que  $m(E) < \delta \Rightarrow m(f(E)) < \epsilon$ . Pero como a posteriori  $f$  es de variación acotada

$\Rightarrow$  diferencia de crecientes y para esas coincide, en lo mismo).

Ejercicio: Si  $f \in L^1([a,b]) \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt$  es abs. continua.

Si  $f$  es abs. continua  $\Rightarrow$  es de variación acotada ( $\rightarrow f'$  existe m-cdp)

Si no se pide que los intervalos disjuntos  $\Rightarrow \sqrt{x}$  que es abs. cont no sería. (ver práctico.)

Resultado clave es:

Teorema: Si  $F$  es absolutamente continua en  $[a,b]$  y  $F'(x) = 0$  m-cdp  $\Rightarrow F$  es constante.

dem: Fijamos  $\epsilon > 0$  y  $c \in [a,b]$ . Tenemos un cubrimiento de Vitali

de  $[a,c]$  por intervalos  $I = [x_i, y_i]$  tal que  $D(I) = \frac{|f(y_i) - f(x_i)|}{y - x} < \frac{\epsilon}{(c-a)^2}$

Elegimos  $\delta$  de cont. absoluta tq toda flja de int. disjuntos de long total  $< \delta$

cumple que  $\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon/2$  ( $I_i = (x_i, y_i)$  ordenados)

Por el Teo de Vitali  $\exists I_1, \dots, I_N$  tales que  $[a,c] \setminus \bigcup_{i=1}^N I_i$  mide  $< \delta$

Entonces, tenemos que la variación total de  $F$  en esa partición es  $< \epsilon$ ,

es decir:  $|F(c) - F(a)| \leq \underbrace{\sum_{i=1}^N |F(y_i) - F(x_i)|}_{< \epsilon/2} + \underbrace{\sum_{i=2}^N |F(x_i) - F(y_{i-1})| + |F(x_1) - F(a)| + |F(c) - F(y_N)|}_{< \epsilon/2} \Rightarrow 0k.$

Corolario: Si  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  absolutamente continua  $\Rightarrow F'$  existe m-ctp (f.c.)

38

y se tiene que  $F(x) = \int_a^x F'(t) dt + F(a)$

dem: Ya vimos que  $\text{Var}(F) < \infty \Rightarrow F'$  existe m-ctp y está en  $L^1$

Para ver lo otro, sea  $g(x) = \int_a^x F'(t) dt$  abs. cont. (pues  $\int_a^b |F'(x)| dx \leq \text{Var}(F)$ )

~~Para~~ la función  $h = F - g$  es absolutamente continua

y  $h' = 0$  m-ctp  $\Rightarrow h$  es constante como buscamos //

Obs: Lo que probamos da una biyección lineal

$$L^1([a, b], dm) \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{funciones abs. continuas} \\ \text{de } [a, b] \text{ tq } f(a) = 0 \end{array} \right\}$$

Via integración (siendo la inversa la derivada).

Es notable que esta biyección lineal es una isometría

si dotamos  $L^1$  con la norma  $\|\cdot\|_{L^1}$  y las absolutamente continuas con  $\|f\| = \text{Var}(f)$ .

En particular muestra que las absolutamente continuas son completas con  $\text{Var}(f)$ .

(Nota aparte: Si restringimos a  $L^\infty$ , manda a las funciones Lipschitz con la norma Lipschitz, ver práctico...)

# MEDIDA ABSTRACTA

X conjunto.

contienen  $\{\phi, X\}$

$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$  es un álgebra si es cerrado por complementos y uniones finitas ( $\Rightarrow$  intersecciones finitas)

una  $\sigma$ -álgebra cerrada por complementos y uniones numerables ( $\Rightarrow$  intersecciones numerables)

Una medida (positiva) es una función:

$\mu: \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$  tal que si  $E_1, \dots, E_n, \dots$  disjuntos 2 a 2

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

(Nota: en particular,  $\mu(\phi) = 0$ )

Ejemplos:  $\rightarrow$  La medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$  con  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue o de ~~sets~~ Borel. Si  ~~$f \geq 0$~~   $f \geq 0$  medible  $\mu_f(E) = \int_E f \, d\mu$  es medida

$\rightarrow$  X conjunto,  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}(X)$  y  $\mu$  es la medida de conteo  $m = \mu_{\#1}$

es decir  $\mu(E) = \#E$ . (con esta medida, las sumas son "integrales")

$\rightarrow$  Si  $(X, \mathcal{Q}, \mu)$  es espacio de medida, podemos definir

$$\hat{\mu}(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu(E) = 0 \\ \infty & \text{si } \mu(E) > 0 \end{cases}$$

dejen que es medida. (pensean en  $f = \infty$  en  $\mathbb{R}$  al ejemplo 1)

Definimos  $\mu$  siendo  $\sigma$ -finita si  $X = \bigcup_{n \geq 0} A_n$  con  $\mu(A_n) < \infty$ .

Para construir medidas, vamos a "copiar" lo hecho para la medida de Lebesgue...

Sea  $X$  un conjunto.

Una medida exterior  $\mu_*$  en  $X$  es una función

$\mu_*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  tal que:

- (i)  $\mu_*(\emptyset) = 0$
- (ii) Si  $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \mu_*(E_1) \leq \mu_*(E_2)$
- (iii) Si  $E_1, \dots, E_n, \dots \Rightarrow \mu_*(\bigcup_{i \geq 0} E_i) \leq \sum_{i \geq 0} \mu_*(E_i)$

Dada una medida exterior  $\mu_*$  en  $X$  decimos que un conjunto  $E \subseteq X$  es Caratheodory medible (o medible) si se cumple que:

$$\mu_*(A) = \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A) \quad \forall A \subseteq X$$

(Ejercicio: Chequear que la condición que pusimos para que un conjunto sea Lebesgue medible es equivalente a esta.)

Nota:  $\mu_*(A) \leq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A) \quad \forall A$  por subaditividad siempre  $\Rightarrow$  para mostrar la medibilidad alcanza mostrar la otra desigualdad.

- Si  $\mu_*(E) = 0 \Rightarrow$  es medible (pues  $\mu_*(E \cap A) \leq \mu_*(E) = 0 \Rightarrow \mu_*(A) \geq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A)$ .)

Teorema Si  $\mu_*$  es medida exterior  $\Rightarrow$  el conjunto  $\mathcal{Q} = \{E \subseteq X : E \text{ es medible}\}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mu_*|_{\mathcal{Q}}$  es una medida.

dem:  $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{Q}$  obviamente y es cerrado por complementos tb obvio.

Primero vamos a tomar uniones finitas de conjuntos ~~de~~, si  $E_1, E_2 \in \mathcal{Q}$  ~~entonces~~  $A \subseteq X \Rightarrow$

$$\mu_*(A) = \mu_*(E_1 \cap A) + \mu_*(E_1^c \cap A) = \mu_*(E_2 \cap E_1 \cap A) + \mu_*(E_1 \cap E_2^c \cap A) + \mu_*(E_1^c \cap A)$$



Por subaditividad, tenemos  $(E_1 \cup E_2)^c = E_1^c \cap E_2^c$ .

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cap E_2 \cup (E_1 \cap E_2^c) \cup (E_1^c \cap E_2)$$

$$\Rightarrow \mu_*(A) \geq \mu_*(E_1 \cup E_2 \cap A) + \mu_*(E_1 \cup E_2)^c \cap A$$

Esto muestra (por inducción) que  $\mathcal{Q}$  es un álgebra.

Veamos que si  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  para  $E_1, E_2 \in \mathcal{Q}$   $\Rightarrow \mu_*$  es aditiva:

$$\begin{aligned} \mu_*(E_1 \cup E_2) &= \underbrace{\mu_*(E_1 \cap (E_1 \cup E_2))}_{E_1} + \underbrace{\mu_*(E_1^c \cap (E_1 \cup E_2))}_{E_2} \\ &= \mu_*(E_1) + \mu_*(E_2) \end{aligned}$$

De nuevo, para uniones finitas disjuntas por inducción.

Para  $\sigma$ -álgebra ahora alcanza ver que es cerrado por uniones numerables disjuntas (pues ya es álgebra)  $\Rightarrow$  si  $E_1, \dots, E_n, \dots$  — conjuntos

$$\Rightarrow \cup E_i = \cup F_i \quad \text{con } F_i = E_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} E_j$$

Sea entonces  $\{E_i\}$  disj 2 a 2 y definimos

$$F_n = \bigcup_{i=1}^n E_i \quad \text{y} \quad F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i. \quad \text{Sabemos que } F_n \in \mathcal{Q} \quad \forall n.$$

$$\begin{aligned} \text{y } \forall A \in \mathcal{X} \text{ vale } \mu_*(A \cap F_n) &= \mu_*(E_n \cap (A \cap F_n)) + \mu_*(E_n^c \cap (A \cap F_n)) = \\ &= \mu_*(E_n \cap A) + \mu_*(F_{n-1} \cap A) = \sum_{i=1}^n \mu_*(A \cap E_i) \end{aligned}$$

Como  $F^c \subseteq F_n^c \quad \forall n$  vale que

$$\mu_*(A) = \mu_*(F_n \cap A) + \mu_*(F_n^c \cap A) = \sum_{i=1}^n \mu_*(A \cap E_i) + \mu_*(F_n^c \cap A) \geq \sum_{i=1}^n \mu_*(A \cap E_i) + \mu_*(F_n^c \cap A)$$

Tomando límites se ve que

$$\mu_*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(A \cap E_i) + \mu_*(F^c \cap A) \geq \mu_*(F \cap A) + \mu_*(F^c \cap A) \geq \mu_*(A)$$

Entonces  $F \in \mathcal{Q}$ .

Tomando  $A = F$  obtenemos ~~que~~  $\mu_*(F) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(E_i) \geq \mu_*(F)$

obteniendo la aditividad numerable.

Obs: La  $\sigma$ -álgebra de Carathéodory tiene la propiedad de ser

"Completa" respecto a  $\mu = \mu_*|_{\mathcal{Q}}$ ; es decir si  $\mu(F) = 0$  y

$E \subseteq F \Rightarrow E \in \mathcal{Q}$ . (Relacionado a la completitud de  $L^p(X, \mu)$  a ser definido dps.)

Esta no es exactamente la manera que definimos la  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue, pero es equivalente.

Si  $\mu_*$  es una medida exterior en un espacio métrico  $(X, d)$ , decimos que es métricamente exterior si cumple que

$$\mu_*(A \cup B) = \mu_*(A) + \mu_*(B) \text{ siempre que } d(A, B) > 0.$$

Teorema Si  $\mu_*$  es una medida métricamente exterior, entonces los Borelianos de  $X$  son Carathéodory medibles ( $\Rightarrow \mu_*$  induce una medida posta en la  $\sigma$ -álgebra de Borel)

dem: Alcanza ver que los cerrados son medibles. Sea  $F$  cerrado y  $A \subseteq X$  cualquiera con  $\mu_*(A) < \infty$ . Sea

$$A_n = \{x \in F^c \cap A : d(x, F) \geq 1/n\}$$

Como  $F$  es cerrado, tenemos que  $F^c \cap A = \bigcup_n A_n \leftarrow$  que es una unión creciente.

Como  $d(F \cap A, A_n) \geq \frac{1}{m}$  tenemos <sup>monotonía</sup>

$$\mu_*(A) \geq \mu_*(F \cap A) \cup A_n = \mu_*(F \cap A) + \mu_*(A_n)$$

(notar que  $\mu_*(A) \leq \mu_*(F \cap A) + \mu_*(F^c \cap A)$  es siempre gratis)

Alcanza entonces ver que  $\lim \mu_*(A_n) = \mu_*(F^c \cap A)$

Sea  $B_m = A_{n+1} \cap A_n^c$  los "coronas"

Entonces,  $d(B_{n+1}, A_n) > 0$

Como  $\bigcup_m B_{2m}$  y  $\bigcup_m B_{2m+1} \subseteq F^c \cap A$  que tiene medida finita, tenemos que

$$\sum_m \mu_*(B_m) \text{ es convergente.}$$

Por otro lado

$$\mu_*(A_n) \leq \mu_*(F^c \cap A) \leq \mu_*(A_n) + \sum_{n+1}^{\infty} \mu_*(B_m)$$

lo que completa la prueba. ▀

[ Def: Una medida en los Borelianos se llama usualmente medida de Borel. Se dice que es de Radón si es finita en ~~los~~ compactos ~~compactos~~ compactos. ]

Prop: Sea  $\mu$  medida de Borel finita en bolas de  $X$  de radio finito  $\Rightarrow \forall E$  boreliano y  $\varepsilon > 0$  existe  $F \subseteq E \subseteq \mathcal{O}$  en  $\mathcal{O}$  abierto y  $F$  cerrado tq  $\mu(\mathcal{O} \setminus F) < \varepsilon$ .

dem: Veamos que los conjuntos que cumplen la proposición son una

$\sigma$ -álgebra. Cerrado por complementos es obvio y  $\emptyset$  pertenece a  $\mathcal{A}$ .

Para ver las uniones numerables, los abiertos no son problema, pero para los cerrados necesitamos la hipótesis:

AF: Si  $\{F_n\}$  son cerrados  $\xrightarrow{\forall \varepsilon} \exists \hat{F}$  cerrado tq  $m(\cup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus \hat{F}) < \varepsilon$ .

dem: ~~Se~~ Notar que si  $C_n = \overline{B}_n \setminus B_{n-1}$  con  $B_n = B(\mathbf{0}, n)$  con  $x_0$  fijo

$\Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} C_n = X$ . Además,  $\mu(C_n) < \infty \forall n$  por hipótesis.

Consideramos  $n_k > 0$  tq  $\mu(C_{n_k} \cap \overline{F}_m) - \mu(C_{n_k} \cap \bigcup_{i=1}^{n_k} F_m) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

Ahora  $\hat{F} = \bigcup_k C_{n_k} \cap \bigcup_{i=1}^{n_k} F_m$  en un cerrado en  $\cup_m F_m$

que cumple lo deseado.  $\square$

Ahora, si tenemos una unión numerable  $F_m$  de conjuntos que cumplen y fijamos  $\varepsilon > 0$  podemos fácilmente encontrar el cerrado y el abierto.

De forma similar, si  $E$  es abierto, tomamos  $E = \mathcal{O}$  y para  $F$  tomamos puntos a distancias positivas de  $\mathcal{O}^c$  que dependen de en que  $C_n$  estás y listo. (Usa de más que es finita en bolas)

$\nwarrow \overline{B}_m \setminus B_{m-1}$



Un álgebra en  $X$  es una flia de subconjuntos de  $X$  que contiene al  $\emptyset$  y es cerrada por uniones finitas & complementos.

Una premedida en un álgebra  $\mathcal{A}$  es  $\mu_0: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  que cumple que:

$$(i) \mu_0(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \text{ Si } E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A} \text{ disjuntos } \mathbb{Z}^+ \text{ tq } \bigcup_{k=1}^n E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow$$

$$\mu_0\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k)$$

(en particular,  $\mu_0$  es finitamente aditiva y monótona)

La clave es que con una premedida podemos definir una medida exterior fácilmente:

Lema Si  $\mu_*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  definida como:

$$\mu_*(E) = \inf \left\{ \sum_n \mu_0(E_n) : E \subseteq \bigcup_n E_n \text{ y } E_n \in \mathcal{A} \forall n \right\}$$

Entonces: (i)  $\mu_*$  es medida exterior.

$$(ii) \mu_* = \mu_0 \text{ en } \mathcal{A}$$

(iii) Los conjuntos de  $\mathcal{A}$  son todos Carathéodory medibles

dem: (ii) es fácil, (iii) tb.

Para mostrar (iii) hay que ver que si  $E \in \mathcal{A}$  y  $A \subseteq X$  cualquiera

$$\Rightarrow \mu_*(A) \geq \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A^c) - \epsilon.$$

Para eso cubrirnos  $A$  por conjuntos de  $\mathcal{A}$  a menos de  $\epsilon > 0$  (notar que se puede suponer  $\mu_*(A) < \infty \Rightarrow$  cola convergente y dps se usa aditividad finita.)



## Integración en general

47

Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida.

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$  es medible si  $\mathbb{R}f^{-1}([-\infty, a]) = \{f < a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Propiedades Decir que  $f = g$   $\mu$ -c.t.p significa  $\mu(\{f(x) \neq g(x)\}) = 0$ .

Tenemos las siguientes propiedades con la misma prueba que en  $\mathbb{R}^d$ :

1) Las funciones medibles son un álgebra con las operaciones punto a punto.

2) El límite puntual de funciones medibles (idem  $\limsup, \liminf, \sup, \inf$ ) es medible.

Si  $\mathcal{A}$  es completa (i.e. si  $E \in \mathcal{F}$  con  $\mu(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{A}$ )

entonces el límite casi todo punto tb.

Para integrar entonces la clave eran las funciones simples y

el Teo de Egorov:

Def:  $f$  es simple si es medible, con soporte de medida finita y tomando finitos valores:  $f = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{E_i}$  con  $\mu(E_i) < \infty \quad \forall i$ .

Cuando  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  es  $\sigma$ -finito tenemos que:

Prop: Toda función medible es límite puntual de simples. Si es positiva, el límite es creciente y en general, las simples se pueden tomar de módulo menor que el límite (i.e. módulos creciente)

Para integrar, la clave era la aproximación por simples

48

y el

Teorema (Egorov) Si  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -c.t.p. ~~acotada~~ con  $\text{sop } f_n$  <sup>c.sop</sup> de medida finita  $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists E \subseteq X$  t.q.  $\mu(X \setminus E) < \epsilon$  y t.q.  $f_n \Rightarrow f$  en  $E$ .

dem: Idéntica a  $\mathbb{R}^d$ .  $E \supseteq \text{sop } f_n \quad \forall n$ . con  $\mu(E) < \infty$

$$E_k^n = \{x \in E : |f_j(x) - f(x)| < 1/n \quad \forall j > k\}$$

Para  $n$  fijo,  $\bigcup_k E_k^n = E \pmod{0}$  y es unión creciente.

Entonces, existe  $k_n$  t.q.  $\mu(E \setminus E_{k_n}^n) < \epsilon/2^n$

Tomando  $A = \bigcap_n E_{k_n}^n$  tenemos  $\mu(E \setminus A) < \epsilon$  y en  $A$

tenemos convergencia uniforme.  $\blacksquare$

Para definir la integral seguimos entonces los mismos 4 pasos:

1) Funciones simples      2) Funciones acotadas  
con soporte de medida finita

3) Funciones positivas      4) Funciones en general con  $\int |f| d\mu < \infty$   
(reales o complejas)

Se cumplen:

Prop: Linealidad, monotonia, desigualdad triangular

Teoremas de convergencia:  $\{f_n\}$  funciones medibles

(Fato) Si  $f_n$  no negativos  $\Rightarrow \liminf f_n d\mu \leq \liminf (\int f_n d\mu)$  (de hecho  $\limsup \int f_n - f d\mu \leq \int$ )

(Conv. Monótona)  $f_n$  no negativos y  $f_n \uparrow f \Rightarrow \lim \int f_n = \int f d\mu$

(Conv. Dominada)  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -c.t.p. y  $\exists g \in L^1$  t.q.  $|f_n| \leq g \Rightarrow \lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$ .



Se pueden definir idénticamente los espacios  $L^p(X, \mu)$  y hablar de convergencia  $\mu$ -c.p., en  $L^p$ , en medida, etc.

Conviene revisar todas las propiedades (e.g.  $L^p$  es completo) para ver que nunca usamos que  $X = \mathbb{R}^d$  y  $\mu = \text{Lebesgue}$ .

Nota: En ocasiones implícitamente estamos asumiendo que  $(X, \mu)$  es  $\sigma$ -finita aunque no lo digamos. Algunos resultados pueden ser ligeramente más delicados si no. ¿Quién es  $L^p(X, \mu)$  si  $\mu$  es la medida de conteo? ¿Es separable? ...

### TEOREMA DE FUBINI

Vamos a construir, para espacios  $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  y  $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  una  $\sigma$ -álgebra y una medida en  $X_1 \times X_2$ .

Esto generaliza a productos finitos de espacios.

Nota: Esto tb se puede intentar en productos infinitos (numerables) y es muy importante en Probabilidad (convinata al azar, procesos estocásticos, mov. browniano) y tiene sobre todo sentido para espacios de probabilidad como veremos pronto.

Vamos a asumir que ambos espacios son  $\sigma$ -finitos (y comentaremos que se complica si no lo son)

Definimos  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(X_1 \times X_2)$  los conjuntos que son uniones finitas de rectángulos (i.e. conjuntos de la forma  $A \times B$  con  $A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathcal{A}_2$ )

Chequear:  $\mathcal{A}$  es un álgebra.

Nota: Esto no es difícil, pero Tiene cierto trabajo, e.g. la unión de dos rectángulos se escribe como seis rectángulos disjuntos, el complemento como 3 ...

Definimos para un rectángulo  $A \times B$

$$\mu_0(A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B)$$

Prop: Si  $A \times B = \bigcup_n^{\text{disj}} A_n \times B_m \Rightarrow \mu_0(A \times B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_0(A_n \times B_m)$

(Nota: Esto implica que  $\mu_0$  define premedida en  $\mathcal{A}$ )

dem: Dado  $x_1 \in A$ , por ser unión disjunta, si  $x_2 \in B$  entonces

$(x_1, x_2)$  pertenece a un único  $A_n \times B_m$

Entonces,  $B = \bigcup \{B_n : x_1 \in A_n\}$  y esta unión es disjunta

$$\Rightarrow \chi_A(x_1) \mu_2(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x_1) \cdot \mu_2(B_j)$$

Integrando en  $x_1$  (resp  $d\mu_1$ ) obtenemos (también por conv. monótona para sacar la serie)

$$\mu_1(A) \mu_2(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(A_j) \mu_2(B_j)$$

Con esto podemos extender  $\mu_0$  a una medida  $\mu := \mu_1 \times \mu_2 = \mu_1 \otimes \mu_2$  en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  generada por  $\mathcal{A}$  en  $X_1 \times X_2$ .

$\hookrightarrow$  nota, tomamos la generada, no su completación.

Sea  $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E\}$ ;  $E^{x_2} = \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in E\}$

Lo mismo, podemos definir, si  $f: X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$  ~~entonces~~ las funciones

$$f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2) \text{ de } X_2 \text{ en } \mathbb{R}$$

$$f^{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2) \text{ de } X_1 \text{ en } \mathbb{R}$$

que a priori no tienen por ser medibles,

Teorema (Fubini) Si  $f: X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C})$  es integrable en  $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2)$

entonces: (i) para  $\mu_2$ -c.p.  $x_2 \in X_2$  vale que  $f^{x_2}$  es integrable en  $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$

(ii)  $x_2 \mapsto \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) d\mu_1(x_1)$  es integrable en  $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$

$$(iii) \int_{X_2} \left( \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d\mu(x_1, x_2)$$

dem.: F la clase de funciones que lo cumple. Contiene  $\mathcal{X}_E$  con  $E \in \mathcal{A}$ .

Es cerrado por combinaciones lineales finitas ( $\Rightarrow$  podemos restringir a mostrear que vale para  $f \geq 0$ ). Por convergencia monótona, alcanza chequearlo para funciones simples, ergo, para características.  $\leftarrow$  (recordar prueba en  $\mathbb{R}^d$ , es idéntico)

Para características veamos primero que anda para rectángulos.

Dps que anda para uniones numerables disjuntas (conv. monótona) y para intersecciones numerables es similar (aunque aquí es crucial que sea  $\sigma$ -finita. Recordar de nuevo el caso de  $\mathbb{R}^d$ )

Con esto se ve que los conjuntos de medida nula tb cumplen pq están contenidos en intersección de uniones de rectángulos.  $\leftarrow$  intersección num de

Finalmente, todo conjunto medible difiere de una unión numerable por un conj de medida nula.  $\square$

Obs: Tb hay análisis de Tonelli. Siempre es importante  $\sigma$ -finitud.

E.g: Tomar  $([0,1], \text{Lebesgue})$  y  $([0,1], \text{conteo})$

$$\text{Sea } f = \chi_{\text{diagonal}} \Rightarrow \iint_{[0,1] \times [0,1]} f d\text{conteo} d\text{Leb} = 1$$

$$\iint f d\text{Leb} d\text{conteo} = 0.$$

$$\int f d(\text{Leb} \times \text{Conteo}) = \text{Leb} \times \text{Conteo}(\text{Diagonal}) = \infty$$

Las medidas como venimos trabajando son un "cono" <sup>convexo</sup>, las podemos sumar y multiplicar por números positivos.

Dado que no las podemos restar, no son un E.V. y muchas veces eso ayuda. Siempre es bueno tener una definición independiente del objeto y luego ver que efectivamente es el E.V. generada.

Sea  $X$  espacio y  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$  una sigma algebra.

$\nu: \mathcal{Q} \rightarrow (-\infty, +\infty]$  es una medida signada si

es numerablemente aditiva: si  $\{E_n\}$  disjuntos 2 a 2

$$\Rightarrow \nu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \nu(E_n)$$

[Obs: Hay que notar que en particular implica que la suma tiene que ser indep. del reordenamiento ( $\Rightarrow$  si  $\nu(\cup E_n) < \infty$  la serie converge absolutamente).

[Ejemplo: Sea  $\mu$  medida (positiva) y  $f \in L^1(X, \mu)$  (no nec. positiva) entonces  $\nu(E) = \int_E f d\mu$  es medida signada (~~que toma valores~~ <sup>que toma valores</sup> en  $[-M, M]$  con  $M \leq \int |f|$ )

Si  $\nu(E) = \int_E f d\mu$  (notación:  $d\nu = f d\mu$ ) es claro que

$\nu$  es menor o igual que una medida positiva que es la menor con esta propiedad, <sup>(en cierto sentido)</sup>

es  $|\nu| = |f| d\mu$ . Nos gustaría generalizar esto.

Es decir, encuentran la "mejor" medida positiva  $\tau$   $-|\nu| \leq \nu \leq |\nu|$

Def: Sea  $\nu$  una medida signada, definimos  $|\nu|$  en  $(X, \mathcal{A})$

como  $|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\nu(E_n)| : E = \text{disj} \bigcup_{i=1}^n E_n, \text{ con } E_n \in \mathcal{A} \right\}$

llamamos  $|\nu|$  la variación total de  $\nu$

Prop:  $|\nu|$  es una medida y cumple  $\nu \leq |\nu|$  ( $\nu - |\nu| \leq \nu$ )

dem: Sea  $\{E_n\}_n \subset \mathcal{A}$  disjuntos dos a dos. y sea  $E = \bigcup E_n$ .

Veamos primero que  $\textcircled{1} \sum |\nu|(E_n) \leq |\nu|(E)$

Fijamos  $\epsilon_n > 0$  arbitrarios (e.g.  $\epsilon_n < \epsilon/2^n$ )

y tomamos  $\{F_i^n\}$  disjuntos dos a dos tq  $E_n = \bigcup_i F_i^n$

y tq  $|\nu|(E_n) - \epsilon_n \leq \sum |\nu|(F_i^n)$

Entonces  $\sum_n (|\nu|(E_n) - \epsilon_n) \leq \sum_{i, n} |\nu|(F_i^n) \leq |\nu|(E)$   
por def.

Como los  $\epsilon_n$  son arbitrarios obtenemos lo deseado. (1)

Para ver (2)  $|\nu|(E) \leq \sum_m |\nu|(E_m)$  fijamos  $\epsilon > 0$  y.

consideramos  $E = \text{disj} \bigcup_k F_k$ . tq  $\sum |\nu|(F_k) \geq |\nu|(E) - \epsilon$

Ahora,  $\sum_k |\nu|(F_k) \leq \sum_k \sum_m |\nu|(F_k \cap E_m) = \sum_m \sum_k |\nu|(F_k \cap E_m)$

ves m-sign. y desig.  $\Delta$

dej de  $|\nu|$

$\leq \sum_m |\nu|(E_m)$  que como  $\epsilon$  es arbitrario da (2).

Ahora, si escribimos

(nota: si  $\nu(E) = +\infty$   
 $\Rightarrow \nu^-(E) = 0$ ,  
recorramos que  
 $\nu(E)$  siempre es  $> -\infty$ )

$$\nu^+ = \frac{1}{2}(\nu^+ + \nu) \quad \text{y} \quad \nu^- = \frac{1}{2}(\nu^+ - \nu)$$

se cumple que  $\nu^+$  y  $\nu^-$  son medidas positivas y  
(ejercicio fácil)

tenemos que  $\nu = \nu^+ - \nu^-$  mientras  $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ .

Def: Decimos que  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son mutuamente singulares <sup>positivas</sup> ~~separadas~~ si  $\exists A \in \mathcal{A}$   
ta  $\mu_1(A) = 0$  y  $\mu_2(A^c) = 0$ .

Decimos que  $\mu_1$  es absolutamente continua respecto a  $\mu_2$   
(notación  $\mu_1 \ll \mu_2$ ) si  $\forall E \in \mathcal{A}$  tq  $\mu_2(E) = 0$ , se  
cumple que  $\mu_1(E) = 0$ .

Dos medidas positivas  $\mu_1, \mu_2$  son equivalentes (not:  $\mu_1 \sim \mu_2$ )  
si tienen los mismos conjuntos de medida nula (es decir  
 $\mu_1 \ll \mu_2$  y  $\mu_2 \ll \mu_1$ )

Obs: Estas nociones son más delicadas de definir para medidas  
signadas pero puede ser que  $\nu(E) = 0$  pero tenga subconjuntos de  
medida positiva o negativa. Las definiciones son entonces:  
con la variación total

$$\nu_1 \perp \nu_2 \iff |\nu_1| \perp |\nu_2|$$

$$\nu_1 \ll \nu_2 \text{ si } |\nu_1| \ll |\nu_2|$$

Proposición:  $\nu^+ \perp \nu^-$  (Decimos que  $\nu = \nu^+ - \nu^-$  es la Descomposición de Jordan)

Adicionalmente, la descomposición  $\nu = \nu^+ - \nu^-$  es única en escribir  $\nu$  como resta de medidas positivas y mutuamente singulares.

dem: Consideremos el caso que  $\nu$  es finita (i.e. toma valores en  $[-M, M]$ ), sino se adapta pq como no toma  $-\infty$  está bien. ya que el argumento usa solo una de las cotas)

Sea  $\alpha = \sup\{\nu(E) : E \in \mathcal{Q}\} \geq 0$ .

Af: Existe  $P \in \mathcal{Q}$  tq  $\nu(P) = \alpha$ . (consecuencia, todo subconj de  $P$  mide  $> 0$ )

dem: Nos gustaría tomar  $E_m$  con  $\nu(E_m) \geq \alpha - \frac{1}{m}$

y considerar  $P = \cup E_m$  pero esto no camina pues podemos estar considerando partes de  $E_m$  con medida negativa ( $\Rightarrow \nu(P)$  no tiene porque valer  $\alpha$ )

Vamos entonces a sacarle a  $E_m$  la parte negativa:

[ • Sea  $E \in \mathcal{Q} \Rightarrow \exists A_E \subseteq E$  con  $\nu(A_E) \geq \nu(E)$  y  
tq  $\nu(F) \geq 0 \forall F \subseteq A_E$  (decimos que  $A_E$  es Positivo) ]

Para ver esto, sea  $B_1 \subseteq E$  con  $\nu(B_1) \leq 0$  y  $\nu(B_1) \leq \inf\{\nu(B) : B \subseteq E\} + 1$ .

Entonces,  $A_1 = E \setminus B_1$  mide  $\geq E$ . Ahora,  $B_2 \subseteq A_1$  de medida  $\leq 0$  y  $\nu(B_2) \leq \inf\{\nu(B) : B \subseteq A_1\} + \frac{1}{2}$  " " "  
 $A_2 = A_1 \setminus B_2$  " " "  
.....  $B_m \subseteq A_{m-1}$  " " "

y  $\nu(B_m) \leq \inf\{\nu(B) : B \subseteq A_{m-1}\} + \frac{1}{2^m}$  y  $A_n = A_{n-1} \setminus B_n$

Como los  $B_m$  son disjuntos y  $\nu$  no toma  $-\infty$  tenemos  $\sum -\nu(B_m) < \infty \Rightarrow \nu(B_m) \rightarrow 0$

Entonces, tomando

$$A_E = \bigcap_m A_m \subseteq E \text{ tenemos que } \nu(A_E) \geq \nu(E)$$

y como  $A_E \subseteq A_n$  tenemos que  $\inf \{ \nu(B) : B \subseteq A_E \} \leq \inf \{ \nu(B) : B \subseteq A_n \}$   
 $\forall m.$

pero tenemos que  $\inf \{ \nu(B) : B \subseteq A_n \} \leq \nu(B_m) + \frac{1}{2} \epsilon_m \rightarrow 0$

Obteniendo lo deseado.

Ahora, tomando  $P = \bigcup_m A_{E_m}$  si obtenemos el conjunto

deseado para la afirmación.  $\square$

(Nota: Si  $\nu$  es medida signada, la descomposición  $P \cup P^c$  se llama DESCOMPOSICIÓN DE HAHN.)

Afirmamos ahora que  $\nu^-(P) = 0$  y  $\nu^+(P^c) = 0$ .

Supongamos  $\nu^+(P^c) > 0$ . Entonces, existe  $E \subseteq P^c$  tq

$$\nu^+(E) = \frac{1}{2} (\nu^+ + \nu)(E) > 0 \Rightarrow \nu(E_0) > 0. \text{ para algún subconjunto } E_0 \text{ de } E$$

↑ (recordar:  $|\nu| \leq \nu$ )

Pero entonces  $\nu(P \cup E_0) > \nu(P) = \alpha$  contradicción.

En resumen, esta descomposición parte  $\nu$  en su parte positiva

y su parte negativa. (unicidad en fácil)  $\square$

$\nu$  signada  $\Rightarrow$  disjuntos

la desc. es única a menos de conj. de medida  $|\nu|$  nubl.

$$\underline{\text{HAHN}}: \exists P \cup N = X \text{ tq } \begin{matrix} P \text{ es POSITIVO } (\nu(E) \geq 0 \ \forall E \subseteq P) \\ N \text{ es NEGATIVO } (\nu(E) \leq 0 \ \forall E \subseteq N) \end{matrix}$$

JORDAN:  $\nu = \nu^+ - \nu^-$  de forma única con  $\nu^\pm$  medidas positivas mutuam. sing.



La prueba hecha tiene la ventaja de introducir nociones útiles, pero tb se puede probar mediante la siguiente

Prop: Sea  $\nu$  medida signada y  $\mu$  medida positiva tq  $\forall E \in \mathcal{Q}$  vale que  $\mu(E) \geq \nu(E) \Rightarrow \mu(E) \geq \nu^+(E) \forall E \in \mathcal{Q}$ .

dem: Tenemos que  $|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum |\nu(E_n)| : \bigcup E_n = E \right\}$

Fijamos  $\epsilon > 0$  y  $E = \bigcup E_n$  tq  $\sum_n |\nu(E_n)| > |\nu|(E) - \epsilon$

Consideramos entonces  $\hat{E} = \bigcup_{n: \nu(E_n) > 0} E_n$  con lo cual  $\nu(\hat{E}) \sim |\nu|(\hat{E})$  (a menos de  $\epsilon$ )

Por lo tanto  $\nu^+(\hat{E}) \sim \nu(\hat{E}) \leq \mu(\hat{E})$

Como  $|\nu^+(\hat{E} \setminus \hat{E})| < \epsilon$  obtenemos que  $\nu^+(E) \leq \mu(E) + 2\epsilon$  con  $\epsilon$  arbitrario. ■

De esto tb sale que  $\nu^+ \perp \nu^-$  pues si no, podemos seleccionar un cacho de medida a ambas y obtener medida positiva  $\geq \nu$ .

Ahora queremos estudiar el caso de medidas absolutamente continuas a una de referencia.

Recordar que si  $\nu$  signada y  $\mu$  positiva, decimos  $\nu \ll \mu$  si

$\forall E \in \mathcal{Q}$  tq  $\mu(E) = 0$  vale que  $\nu(E) = 0$ .

Teorema (Radon-Nykodim, versión AC) Sea  $\nu$  ~~signada~~ y  $\mu$  positivas

tal que  $\nu \ll \mu \implies$  existe  $f \geq 0$  tal que

$$\nu(E) = \int_E f d\mu.$$

dem: Miramos la medida signada  $\nu - \alpha\mu$  (las asumimos finitas, dps paramos al caso  $\sigma$ -finito)

La desc. de Hahn dice que  $X = P_\alpha \cup P_\alpha^c$  con  $(\nu - \alpha\mu)(E) \geq 0$   $\forall E \subseteq P_\alpha$

Se tiene que cumplir entonces que  $f \stackrel{\text{def}}{\geq} \alpha$  en  $P_\alpha$   $(\nu - \alpha\mu)(E) \leq 0$  y que  $f \stackrel{\text{def}}{\leq} \alpha$  en  $P_\alpha^c$   $\forall E \subseteq P_\alpha^c$

Notan que  $P_\alpha \subseteq P_\beta$  (modo) si  $\beta \leq \alpha$ . (esto quiere decir que

$$\mu(P_\beta \setminus P_\alpha) = 0$$

Consideramos  $P_\alpha : \alpha \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$  con  $P_0 = X$ .  $\rightarrow \nu(P_\beta \setminus P_\alpha) = 0$

y definimos  $f(x) = \sup\{\alpha : x \in P_\alpha\}$

Sea  $\eta$  medida tq  $\eta(E) = \int_E f d\mu$ .

Queremos ver que  $\eta - \nu \equiv 0$ . Para eso, consideramos

E conjunto y lo descomponemos como  $E_k = E \cap (P_{\frac{k}{m}} \setminus P_{\frac{k-1}{m}})$

Entonces,  $|\eta - \nu(E)| = \left| \sum_k (\eta - \nu)(E_k) \right| \leq \frac{1}{m} \sum_k \mu(E_k) = \frac{1}{m} \mu(E)$

Ahora, si  $\mu$  es una medida positiva cualquiera (siempre  $\sigma$ -finita)

59

y  $\nu$  una medida ~~o~~ signada  $\Rightarrow$

Teorema (Radon-Nykodym, General)  $\nu = \nu_a + \nu_s$  con  $\nu_a \ll \mu$  y  $\nu_s \perp \mu$   
de forma única y  $\exists f \in L^1(X, \mu)$  tq  $d\nu_a = f d\mu$

dem: Miramos  ~~$\pi$~~   $\pi = \mu + \nu \Rightarrow \nu \ll \pi$   
(suponemos  $\nu$  positiva)

Escribimos  $d\nu = f d\pi$  y  $d\mu = f d\pi$ .

~~Es~~ Entonces  $\nu_s = \nu \Big|_{\{f=0\}}$   $\nu_a = \nu \Big|_{\{f>0\}}$

Tenemos que  $d\nu_a = \frac{f}{f} d\mu$ .

■

Ahora vamos a intentar entender el espacio de todas las medidas signadas en  $(X, d)$  espacio métrico compacto. Si hay medida de referencia  $\mu$  entonces  $L^1(X, \mu)$  es un subespacio, pero como hay medidas singulares claramente no es todo (y la topología no necesariamente es la misma)

Vamos a denotar:  $\mathcal{M}(X) = \{ \nu \text{ medida signada de Borel en } X \}$

Es un  $\mathbb{R}$ -e.v. (similar, se puede tomar medidas complejas)

Ejercicio:  $\| \nu \| = |\nu|(X)$  es una norma en  $\mathcal{M}(X)$ .

Denotamos  $\mathcal{M}^+(X) \subset \mathcal{M}(X)$  las medidas positivas.

60

Teorema (Riesz positivo) Sea  $\phi: C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$  lineal tal que

si  $f \geq 0 \Rightarrow \phi(f) \geq 0$ . Entonces, existe una única medida de Borel

$\mu$  en  $X$  tal que  $\phi(f) = \int f d\mu \quad \forall f \in C^0(X)$

(y de hecho  $\phi$  es continua resp. topología de conv. uniforme en  $C^0(X)$ )

dem.: Vamos a definir una medida métricamente exterior en  $(X, d)$  y eso va a alcanzar.

Primero vemos que  $\phi$  es continua:

Sea  $K_0 = \phi(1) \Rightarrow \phi(\frac{1}{n}) = \frac{K_0}{n}$ . Por otro lado, por linealidad,

si  $f \leq g \Rightarrow \phi(f) \leq \phi(g)$ .

Dada  $f \in C^0(X)$  tenemos  $f = f^+ - f^-$  funciones positivas

y  $\|f\| \leq \max\{\|f^+\|, \|f^-\|\} \Rightarrow \phi(f) \leq \phi(\|f\|) \leq \|f\| \cdot K_0$ .

Eso da la continuidad.

Definimos  $\mu_*(K) = \inf\{\phi(f) : f \geq 0, \int f|_K \geq 1\}$  para  $K$  compactos.

Ahora, si  $\emptyset$  es abierto, definimos  $\mu_*(\emptyset) = \phi(1) - \mu_*(K) \geq 0$

$\mu_*$  es claramente medida exterior y por teoremas de separación en

$(\mu_*(E) = \inf\{\mu_*(\cup_i \emptyset_i) : E \subset \cup_i \emptyset_i\})$  métricamente exterior.

Se concluye que  $\mu_*$  restringe a una medida en los borelianos.

Para ver que  $\phi(f) = \int f d\mu$ , fijamos un compacto  $K$  y tomamos

$f_n$  continuas que decrecen a  $\frac{1}{n} \chi_K$  puntualmente  $\Rightarrow \phi(f_n) \xrightarrow{\text{convergencia}} \int \frac{1}{n} \chi_K d\mu = \frac{1}{n} \mu(K)$

y  $\phi(f_n) \geq \mu_*(K) \Rightarrow \int \frac{1}{n} \chi_K d\mu = \mu_*(K)$  por ser  $\phi(f_n)$  positiva. Por convergencia dominada podemos aproximar  $\chi_K$  por  $f$  con  $\phi(f) \geq \mu_*(K)$  Recuperamos los simples y dps seguimos.

Teorema de Riesz Las medidas signadas en la norma de la variación total son el dual continuo de  $C^0(X)$ . (Similar, medidas complejas).

En particular  $(M(X), |\cdot|)$  es un espacio de Banach.

dem: Sea  $\phi: C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$  lineal y continua.

Se puede escribir  $\phi = \phi^+ - \phi^-$  con  $\phi^\pm$  positivas. (Ya hicimos varias veces)

Dps se aplica lo anterior.  $\square$

Consecuencia: La bola es debil-\* compacta

Esto es, para la convergencia:  $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$  si

$$\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu \quad \forall f \in C(X).$$

Pero notar que no es compacta para la topología de la norma:

Ejemplo:  $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{x_k/n}$  son medidas atómicas en  $[0,1]$ .

Tenemos que  $\|\mu_n\| = 1 \quad \forall n$  y que  $\|\mu_n - \mu_m\| \rightarrow 0$  con n.m. (se puede calcular explícito)

Sin embargo:  $\mu_n \rightarrow \text{Leb}_{[0,1]}$  en topología  $w^*$

(Ejercicio.)

# MEDIDA DE HAUSDORFF

62

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  y  $\alpha > 0$  (Notar que se puede reemplazar  $\mathbb{R}^d$  por cualquier espacio métrico.)

Definimos  $m_\alpha^*(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_k (\text{diam } U_k)^\alpha : E \subseteq \bigcup_k U_k \text{ y } \text{diam } U_k \leq \delta \forall k \right\}$

$$H_\alpha^\delta(E) \text{ (crece con } \delta \forall 0)$$

No es difícil ver que  $\forall \alpha \geq 0$   $m_\alpha^*$  es una medida métricamente exterior.

Podemos entonces definir  $\{m_\alpha\}_{\alpha > 0}$  una familia de medidas de Borel en  $\mathbb{R}^d$ .

[Nota: Son todas invariantes por traslaciones, pero solo  $m_d$  es  $\sigma$ -finita y no nula (a chequear luego) con lo cual  $m_d$  es un múltiplo de Lebesgue.]

De hecho, es tb invariante por isometrías en geral (preservan el diámetro)

y escala:  $m_\alpha(\lambda E) = \lambda^\alpha m_\alpha(E) \quad \forall \lambda > 0$ .

[Algunas propiedades: (1)  $m_0$  es la medida de conteo.

(2) Si  $m_\alpha^*(E) < \infty$  y  $\beta > \alpha \Rightarrow m_\beta^*(E) = 0$

(3) Si  $m_\alpha^*(E) > 0$  y  $\beta < \alpha \Rightarrow m_\beta^*(E) = \infty$

Esto nos dice que dado  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  podemos definir

$$\dim_H(X) = \inf \{ \alpha : m_\alpha^*(X) = 0 \} = \sup \{ \alpha : m_\alpha^*(X) = \infty \}$$

↪ la dimensión de Hausdorff de  $X$ .

Si  $\alpha = \dim_H(X)$  puede ser que  $m_\alpha^*(X)$  sea  $0, \infty$  o finita, saben eso es tb importante.

Teorema: El conjunto de Cantor usual tiene dimensión  $\frac{\log 2}{\log 3}$  y medida de Hausdorff finita & positiva.

Hay una cota sencilla, si  $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3} \Rightarrow m_\alpha(\mathcal{C}) \leq 1$

(siempre es más fácil acotar por arriba pues basta encontrar buenos cubrimientos, por abajo hay que ver que esos cubrimientos son óptimos.)

Recordar que  $\mathcal{C} = \bigcap \mathcal{C}_k$  donde  $\mathcal{C}_k$  son  $2^k$  intervalos de longitud  $3^{-k}$ .

Entonces, fijado  $\delta > 0$ , tomamos  $3^{-k} < \delta$  y ese cubrimiento

nos da  $H_\alpha^\delta(\mathcal{C}) \leq 2^k (3^{-k})^\alpha$  pero  $3^\alpha = 2$

$\Rightarrow H_\alpha^\delta(\mathcal{C}) \leq 1 \quad \forall \delta$  que prueba lo deseado.

Nota: Dado que esto implica que  $\dim_H(\mathcal{C}) < 1$ , para ver que  $\mathcal{C}$  es un "FRACTAL" basta ver que  $\dim_H(\mathcal{C}) > 0$  (es fácil ver  $m_0(\mathcal{C}) = \infty$  pero eso no alcanza)

Hay muchas formas de probar esto, vamos a empezar por una que usa un resultado de interés independiente para la teoría:

Recordar que  $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  es  $\gamma$ -Hölder si  $\exists C_\gamma > 0$  tq

$$d'(f(x), f(y)) \leq C_\gamma d(x, y)^\gamma \quad \forall x, y \in X.$$

Prop: Si  $f: E \rightarrow F$  es  $\delta$ -Hölder con constante  $C > 0$

entonces:  $m_p(f(E)) \leq C^p m_\alpha(E)$  si  $p = \alpha/\delta$

(En particular,  $\dim_{\#} f(E) \leq \frac{1}{\delta} \dim_{\#} E$ .)

La prueba es inmediata de la definición.

Notar que si logramos ver que la función de Cantor Lebesgue es  $\delta$ -Hölder con  $\delta = \frac{\log 2}{\log 3}$  se completa la prueba (pero alcanza ver que es Hölder para algún exponente para chequear que es fractal.)

### CONJUNTOS AUTOSIMILARES

$F \subseteq \mathbb{R}^d$  es auto-similar si,  $\exists \{S_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\}_{i=1}^k$

$$F = S_1(F) \cup \dots \cup S_k(F) \quad \text{con}$$

$S_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  SIMILITUDES (translaciones con rotohomotecias);

$$|S_i(x) - S_i(y)| = r_i |x - y|$$

con  $r_i$  la trase de similitud

Vamos a mirar conjuntos autosimilares con mismo  $r_i$ .

Ejemplos:  $\rightarrow$  Cantor.

$\rightarrow$  Sierpinski.

$\rightarrow$  Van Koch

$\rightarrow$  Convulsiones de Bernoulli

$\rightarrow$  No ejemplos pero cari (atractores conformes, etc...)

Para cálculos, ver Capítulo 7, sección 2.2 del Stein-Shakarchi