Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción al Análisis Real–Curso 2015

Práctico 2: Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$

Varios de los ejercicios están tomados del libro [RA]: "Real Analysis"de Stein y Shakarchi. Se sugiere consultarlo, dado que el libro contiene sugerencias y ejercicios relacionados que pueden ser de ayuda. Otros ejercicios tienen pre-requisitos de Topología, se indican con una [T]. El plazo para entregar este práctico es el 5 de mayo.

1. (Teorema 3.4 del [RA]) Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un subconjunto medible y sea $\varepsilon > 0$:

   (a) Probar que existe $U \subset \mathbb{R}^d$ abierto con $E \subset U$ tal que $m(U \setminus E) < \varepsilon$.

   (b) Probar que existe $F \subset \mathbb{R}^d$ cerrado con $F \subset E$ tal que $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

   (c) Probar que si $m(E) < \infty$ existe $K \subset \mathbb{R}^d$ compacto con $K \subset E$ tal que $m(E \setminus K) < \varepsilon$.

   (d) Probar que si $m(E) < \infty$ existe una unión finita $F = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$ de cubos cerrados tal que:

   $$m(E \Delta F) < \varepsilon$$

   donde $A \Delta B$ denota la diferencia simétrica $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

   (e) Mostrar que la parte (d) no es cierta si exigimos que $E \subset F$.

2. (Ejercicio 5 de [RA]) Dado un conjunto E, definimos $\mathcal{O}_n$ mediante

   $$\mathcal{O}_n = \{x \colon d(x, E) < 1/n\}.$$

   Demostrar

   (a) Si E es compacto $m(E) = \lim_{n \to \infty} m(\mathcal{O}_n)$.

   (b) Dar contraejemplos cuando E es cerrado y no acotado, y cuando es abierto y acotado.

3. Propiedades de invarianza de la medida de Lebesgue

   Dados el conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}^d$ y $\delta > 0$ definimos $E_h = E + h = \{x + h \colon x \in E\}$ el conjunto trasladado de E por h y $\delta E = \{\delta x \colon x \in E\}$ el conjunto dilatado de E un factor δ. Demostrar que E_h y δE son conjuntos medibles y que:

   (i) $m(E_h) = m(E)$.

   (ii) $m(\delta E) = \delta^d m(E)$.

   (iii) Si B es una bola de radio r en $\mathbb{R}^d$, entonces $m(B) = r^d m(B_1)$, donde B_1 es la bola de centro en el origen y radio unitario (Ejercicio 6 de [RA]).

Demostrar además que $m(-E) = m(E)$ si $-E = \{-x \colon x \in E\}$.

Observación: Ver página 22 de [RA].

4. (Ejercicio 7 de [RA]) Si $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d)$ es un vector de coordenadas positivas $\delta_i > 0$ $(i = 1, \ldots, d)$ definimos ahora
$$\delta E = \{(\delta_1 x_1, \ldots, \delta_d x_d) \colon (x_1, \ldots, x_d) \in E\}.$$
Demostrar $m(\delta E) = \delta_1 \cdots \delta_d m(E)$.

5. (Ejercicio 8 de [RA]) Sea L una transformación lineal de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}^d$. Demostrar que si $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible, también lo es $L(E)$, utilizando el siguiente procedimiento:
   (a) Notar que si E es compacto también lo es $L(E)$. Luego si E es un conjunto F_σ también lo es $L(E)$.
   (b) Como L verifica
   $$|L(x) - L(y)| \leq M|x - y|,$$
   para algún $M > 0$, podemos ver que la imagen por L de un cubo de lado ℓ esta contenida en un cubo de lado $c_d M \ell$, con $c_d = 2\sqrt{d}$. De allí, si $m(E) = 0$ entonces $m(L(E)) = 0$. Finalmente, aplicar el Corolario 3.5.

6. (Ejercicio 9 de [RA]) Construir un conjunto abierto $U \subset [0, 1]$ tal que $m(\partial \overline{U}) > 0$. Construir un ejemplo análogo en el plano.

7. [T] Un subconjunto de un espacio topológico se dice residual si contiene una intersección numerable de abiertos densos, y magro si está contenido en una unión numerable de cerrados con interior vacío. Un espacio de Baire es un espacio topológico que no se puede escribir como unión numerable de cerrados con interior vacío, y el teorema de Baire asegura que todo espacio métrico completo tiene esta propiedad. En un espacio de Baire, un conjunto residual es todo desde el punto de vista topológico, mientras que un magro es un conjunto pequeño. Sin embargo, desde el punto de vista de la medida estas nociones pueden diferir. (i) Construir un ejemplo de un conjunto magro en $[0, 1]$ con medida positiva. (ii) Construir un ejemplo de un conjunto residual en $[0, 1]$ con medida cero. Sugerencia: Observar que en el repartido 1 construimos un conjunto magro (un conjunto de Cantor) con medida positiva. Considerar una sucesión creciente de conjuntos de Cantor de medida adecuada.

8. Mostrar que no existe una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ que sea invariante por traslaciones, pero sí existe en $[0, 1]$.

9. **Lema de Borel-Cantelli** (Ejercicio 16 de [RA])

   Sea $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una familia numerable de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^d$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. Sea
   $$E = \limsup_{k \to \infty}(E_k) = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k \geq n} E_k = \{x \in \mathbb{R}^d : x \in E_k \text{ para infinitos } k\}.$$
   Probar que E es medible y que $m(E) = 0$.

10. Sea f_k sucesión de funciones medibles definidas en $[0,1]$ con $|f_k(x)| < \infty$ para m-casi todo x. Mostrar que existe c_k sucesión tal que $\lim_k \frac{f_k}{c_k} = 0$ para m-casi todo x.

11. *a*) Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible tal que $m(E) > 0$, mostrar que el conjunto diferencia $D = \{x - y \ : \ x, y \in E\}$ contiene un intervalo alrededor del origen.
    b) Sean $E, F \subset \mathbb{R}$ subconjuntos medibles con $m(E) > 0$ y $m(F) > 0$, mostrar que $E + F = \{x + y \ : \ x \in E \ , \ y \in F\}$ contine un intervalo.
    c) Formular propiedades similares en $\mathbb{R}^d$.

12. ([T]) Sea $\mathcal{B}_{[0,1]}$ la σ-álgebra de Borel y $\mathcal{L}_{[0,1]}$ la familia de los conjuntos medibles (que también forman una σ-álgebra). Sabemos que todo boreliano es medible, o sea $\mathcal{B}_{[0,1]} \subset \mathcal{L}_{[0,1]}$. Probaremos que esta inclusión es estricta.[1]

    Sean $C_1, C_2 \subset [0,1]$ dos conjuntos de Cantor tales que $m(C_1) = 0$ y $m(C_2) > 0$, y sea $h : [0,1] \to [0,1]$ un homeomorfiso tal que $h(C_1) = C_2$. Sea $N \subset C_1$ un conjunto no medible y $X = h^{-1}(N)$. Probar que X es medible y no es un boreliano.

13. Consideramos en $\mathbb{R}$ la σ-álgebra de Lebesgue que denotamos por $\mathcal{L}$ que es la completación de la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$. La medida de Lebesgue será denotada como m.

    a) Mostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces, es medible como función de $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.
    b) Mostrar que si para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}$ cuya medida de Lebesgue es nula se cumple que $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}$, entonces f es medible como función de $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.
    c) Mostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un difeomorfismo C^1 entonces es medible de $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.
    d) Usar el hecho de que el cardinal de los borelianos es el mismo que el de $\mathbb{R}$ para deducir que si una biyección $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica que $m(f^{-1}(C)) > 0$ donde C es un conjunto cuyo cardinal es $\mathbb{R}$ y que $m(C) = 0$ entonces f no es medible como mapa de $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.
    e) Sea K un conjunto de cantor de medida positiva en $[0,1]$ y sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica que $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus K$, se anula en K y $\varphi(x) > 1$ si $|t| > 2$. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$.
        (i) Mostrar que f es un homeomorfismo de clase C^1 pero su inversa no es de clase C^1 (por tanto no es un difeomorfismo). Deducir que $f(K)$ es un conjunto de cantor, en particular, no numerable.
        (ii) Mostrar que $f(K)$ tiene medida de Lebesgue cero (Sugerencia: Fijado $\varepsilon > 0$ considerar un cubrimiento de K por intervalos de forma que la suma de sus longitudes sea menor que $2m(K)$ y de forma que todos esten contenidos en donde φ es menor que ε). .

[1] Sabemos que todo conjunto de medida exterior nula es medible, y eso implica que todo subconjunto de un conjunto de medida cero es medible. Como existen conjuntos medibles de medida nula no numerables (p.ej. el conjunto de Cantor) entonces $\#\mathcal{L}_{[0,1]} = \#\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Se puede probar que $\#\mathcal{B}_{[0,1]} = \#\mathbb{R}$ y esto da otra demostración de que la inclusión es estricta. Ver libro de Folland, pág 39.

(iii) Deducir que f no es medible como mapa de $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

14. *a*) Sea $F \subset (a,b)$ un conjunto medible tal que $F \cap (F+t) = \emptyset$. Mostrar que

$$2m(F) \leq (b-a) + |t|$$

b) Deducir que si $F \subset (a,b)$ cumple que $m(F) > \frac{b-a}{2}$ entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo t con $|t| < \delta$ se cumple que $F \cap (F+t) \neq \emptyset$.

c) Demostrar que si $E \subset \mathbb{R}$ es medible y tiene medida positiva, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (-\delta, \delta)$ vale que $E \cap (E+t) \neq \emptyset$.

d) ¿ Qué pasa si E no es medible ?