Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción al Análisis Real–Curso 2015

PRÁCTICO 3: FUNCIONES MEDIBLES E INTEGRACIÓN

El plazo para entregar este práctico es el 31 de mayo de 2019.

1. *a*) Probar que para toda función medible $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $f_n(x) \to f(x)$, c.t.p. x.

   b) Probar que no existe una función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, c.t.p. x.

2. *a*) Dar un ejemplo de una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ con la siguiente propiedad: existe un conjunto medible $E \subset [0,1]$ tal que $f(E)$ no es medible.

   b) Dar un ejemplo de una función medible f y una función continua Φ tales que $f \circ \Phi$ es no medible.

   Sugerencia: Relacionarlo con los ejercicios 9 y 10 del práctico 2.

3. La idea de este ejercicio es construir una función medible en $[0,1]$ con la siguiente propiedad: Si $g = f$ ctp entonces g es discontinua en todo punto de $[0,1]$.

   a) Construir un conjunto medible $E \subset [0,1]$ con la siguiente propiedad: Para todo intervalo $I \subset [0,1]$ se tiene que $m(E \cap I) > 0$ y $m(E^c \cap I) > 0$.

   b) Probar que $f = \chi_E$ tiene la propiedad que buscamos.

   Sugerencia: Construir primero un conjunto de Cantor K_0. Luego, en cada intervalo del complemento repetir la construcción del conjunto de Cantor y unir todo con K_0 para obtener así el conjunto K_1. Inductivamente, agregar conjuntos de Cantor en los intervalos que forman el complemento de K_n y unir todo.

4. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles definidas en el intervalo $[0,1]$ tales que $|f_n(x)| < \infty$ ctp x, para todo $n \geq 1$. Probar que existe una sucesión de reales positivos c_n de forma que $(f_n(x)/c_n) \to 0$, ctp x.

   Sugerencia: Tomar c_n tal que $m(\{x : |f_n(x)/c_n| > 1/n\}) < 2^{-n}$ y aplicar el lema de Borel-Cantelli.

5. Supongamos que f es integrable Riemann en el intervalo cerrado $[a,b]$. Demostrar que f es medible y que ambas integrales toman el mismo valor.

   Sugerencia: Construir una sucesión creciente de particiones tales que las sumas inferiores y superiores converjan a la integral de Riemann. Construir con estas mismas particiones funciones simples que aproximen la integral de Lebesgue.

   Nota: este resultado está desarrollado en la página 57 de [RA].

6. *a*) Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ está correctamente definida como integral impropia de Riemann, pero que en este caso no se verifica la definición de integrabilidad de Lebesgue.

   b) Encontrar una función integrable Lebesgue que no sea integrable Riemann.

7. Demostrar el lema de Borel-Cantelli del práctico 2 con la ayuda del Corolario 1.10 del Capítulo 2.

   Sugerencia: Dados los conjuntos E_k, considerar $a_k(x) = \chi_{E_k}$.

   Nota: este resultado está desarrollado en la página 63 de [RA].

8. (Ejercio 6 cap. 2 [RA]). La integrabilidad (Lebesgue) de f en $\mathbb{R}$ no implica la convergencia de $f(x)$ a cero cuando $x \to \infty$.

   a) Existe una función continua y positiva en $\mathbb{R}$ que es integrable pero $\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

   b) Si f es uniformemente continua e integrable en $\mathbb{R}$ entonces $\limsup_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

9. Sea f integrable en $[0,1]$ y $g(x) = \int_x^1 (f(t)/t)dt$, $0 < x \leq 1$. Probar que g es integrable en $[0,1]$ y que $\int_0^1 g = \int_0^1 f$.

10. Si f es integrable en $\mathbb{R}$, probar que $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ es uniformemente continua.

    Sugerencia: Aplicar Proposición 1.12 parte (ii) del cap. 2 de [RA].

11. **Desigualdad de Chebishev.** (Ejercicio 9, Cap. 2 [RA])

    a) Sea $f \geq 0$ integrable. Si $\alpha > 0$ y $E_\alpha = \{x\colon f(x) > \alpha\}$, probar que

    $$m(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\int f.$$

    b) Considere el espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{L}, P)$ donde P es la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria (i.e.: una función medible). Se define su valor esperado como

    $$EX = \int X.$$

    Encuentre un intervalo acotado I tal que la probabilidad de que X pertenezca a él sea al menos $0,9$ (i.e.: $P(\{\omega \in [0,1]; X(\omega) \in I\}) \geq 0{,}9$).

12. (Ejercicio 10, cap. 2 [RA]). Supongamos $f \geq 0$ y sean $E_{2^k} = \{x\colon f(x) > 2^k\}$ y $F_{2^k} = \{x\colon 2^k < f(x) \leq 2^{k+1}\}$. Si f es finita c.t.p., demostrar que $\cup_{k=-\infty}^{\infty} F_{2^k} = \{f(x) > 0\}$ y los F_{2^k} son disjuntos. Probar que f es integrable si y solo si

    $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(F_{2^k}) < \infty,$$

si y solo si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(E_{2^k}) < \infty.$$

Usar este resultado para verificar que $f(x) = |x|^{-a}\chi_{\{|x|\leq 1\}}$ es integrable en $\mathbb{R}^d$ si y solo si $a < d$, y que $f(x) = |x|^{-b}\chi_{\{|x|>1\}}$ es integrable si y solo si $b > d$.

13. Sea f integrable en $\mathbb{R}^d$ tal que $\int_E f \geq 0$, para todo $E \subset \mathbb{R}^d$ medible. Probar que $f \geq 0$ c.t.p., y si $\int_E f = 0$ para todo $E \subset \mathbb{R}^d$ medible entonces $f = 0$ c.t.p.

14. La idea de este ejercicio es construir una función F integrable en $\mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: Si $G = F$ c.t.p. entonces G es no acotada en cualquier subintervalo de $\mathbb{R}$.

    Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^{-1/2}\chi_{(0,1)}$, y sea $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de los racionales. Definimos
    $$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - q_n).$$

    Probar que F es integrable y por lo tanto la serie que define a F converge para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Probar además que F tiene la propiedad buscada.

15. **Convergencia de Vitali** Decimos que una familia de funciones $\mathcal{F}$ con dominio en $E \subset \mathbb{R}^d$ verificando que $m(E) < \infty$ es *uniformemente integrable* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma tal que si $F \subset E$ cumple que $m(F) < \delta$ y $f \in \mathcal{F}$ entonces:

    $$\int_F |f| dm < \varepsilon.$$

    Demostrar que si una sucesión de funciones $\{f_n\}_n$ es uniformemente integrable y $f_n \to f$ m-c.t.p., entonces f es integrable y $\int |f_n - f| dm \to 0$.

16. **Criterio de la Velle Pussin** Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones con dominio en $E \subset \mathbb{R}^d$ verificando que $m(E) < \infty$.

    a) Probar que $\mathcal{F}$ es *uniformemente integrable* sii

    $$\lim_{H\longrightarrow\infty} \sup_n \int_{\{x: f_n(x) > H\}} | f_n | \, dm = 0$$

    b) Supongamos que existe $g : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ creciente con $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{g(x)}{x} = \infty$ y tal que $\sup_n \int g(| f_n |) dm < \infty$. Entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente integrable.

17. **Lema de Fatou revisitado** En el teórico mostramos que si $f_n \to f$ m-c.t.p. entonces $\int f \leq \liminf \int f_n$. Mostrar que en general, si f_n es una sucesión de funciones medibles entonces:
    $$\int (\liminf f_n) \leq \liminf \int f_n.$$