Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción al Análisis Real–Curso 2019

Práctico 4: Convergencia, Espacios L^p y Teorema de Fubini

El plazo para entregar este práctico es el 5 de junio de 2019. Entregar el ejercicio 1 y dos a elección.

1. **Convergencia en medida** Decimos que f_n una sucesión de funciones medibles *converge en medida a* f si se cumple que para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \to 0 \quad , \quad n \to \infty.$$

   a) Mostrar que convergencia en L^1 implica convergencia en medida.
   b) Dar un ejemplo donde convergencia en medida no implica convergencia en L^1.
   c) Dar un ejemplo donde convergencia m-ctp no implica convergencia en medida.
   d) Dar un ejemplo donde convergencia m-ctp no implica convergencia en L^1. (Sugerencia: Recordar los contraejemplos al teorema de convergencia dominada sin la hipótesis de que la sucesión esté dominada.)
   e) Dar un ejemplo donde convergencia en medida no implica convergencia m-ctp.
   f) Mostrar que convergencia en medida implica que hay subsucesión que converge m-ctp.
   g) Mostrar que si en vez de $\mathbb{R}^d$, tomamos como dominio $[0,1]^d$, convergencia m-ctp implica convergencia en medida.

2. **Lema de Scheffé** Sean $f_n \geq 0$ y $f \geq 0$ tales que $\int f_n = \int f = 1$ para todo n y tal que $f_n \to f$ m-ctp. Mostrar que $\int |f_n - f| \to 0$.

3. **Lema de Riemann-Lebesgue** Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y definimos su transformada de Fourier como $\hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tal que:

$$\hat{f}(z) = \int f(x) e^{2\pi i \langle x,z \rangle} dm(x).$$

   Demostrar que $\hat{f}(z) \to 0$ cuando $\|z\| \to \infty$.

4. **Teorema de Cantor-Lebesgue** Sean a_n, b_n sucesiones de numeros reales y sea $A_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. Mostrar que si $\sum_{n\geq 0} A_n(x)$ converge en un conjunto de medida positiva entonces a_n y b_n tienden a 0 con n.

5. **Completitud de las series de Fourier en L^2.** Mostrar que dada una sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de números complejos que cumple que $\sum_n |c_n|^2$ se tiene que existe una única función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definida en m-c.t.p. de forma tal que si $S_N : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ está definida como $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ entonces $\|f - S_N\|_2 \to 0$ cuando $N \to +\infty$. Mostrar que $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$.

6. **Densidad de los Polinomios**

   a) Mostrar que los polinomios son densos en $L^2([0, 2\pi])$ (Sugerencia: Usar el ejercicio anterior y el hecho que las funciones que aparecen en S_N son analíticas.)

   b) Deducir que son densos también en $L^p([0, 2\pi])$ para todo $1 \leq p < \infty$. ?' Porqué no es cierto para $L^\infty([0, 2\pi])$?

   c) Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, denotamos $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$ y $S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$. Mostrar que si $\sum_n |c_n(f)| < \infty$ entonces $S_N f$ converge uniformemente a f.

   d) Mostrar que si f es de clase C^2, $f(0) = f(2\pi)$ y $f'(0) = f'(2\pi)$, entonces se cumple que $\sum_n |c_n| < \infty$.

   e) Mostrar que las funciones de clase C^∞ son densas en las funciones continuas tales que $f(0) = f(2\pi)$ con la convergencia uniforme. (Sugerencia: Hacer la convolución con una aproximación de la identidad; y si no conocen esas palabras, buscarlas en internet.)

   f) Deducir que los polinomios son densos en las funciones continuas de $[0, 2\pi]$ con la topología de la convergencia uniforme. (Cuidado: No estamos restringiendonos acá a las que cumplen $f(0) = f(2\pi)$.)

7. **Desigualdad de Hölder**

   a) **Desigualdad de Cauchy-Schwartz** Mostrar que si $f, g \in L^2$ entonces se cumple que $|\langle f, g\rangle| = \left|\int f\overline{g}\right| \leq \|f\|_2\|g\|_2$. Demostrar que la igualdad implica que f y g son colineales.

   b) Mostrar que si $f \in L^1$ y $g \in L^\infty$ entonces $\left|\int fg\right| \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$.

   c) Más en general, mostrar que si $1/p+1/q = 1$ entonces si $f \in L^p$ y $g \in L^q$ entonces:

   $$\left|\int fg\right| \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

   d) Mostrar que la igualdad en la desigualdad anterior implica que $|f|^p$ es colineal a $|g|^q$.

8. **Desigualdad de Minkowski** Sea $p \geq 1$ y $f, g \in L^p$. Mostrar que $f + g \in L^p$ y se cumple que

   $$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

   (Sugerencia: Dado que ya fue probada en el teórico, intentar probarla como consecuencia de la desigualdad de Hölder, para eso, mostrar que si $f \in L^p$ entonces la función $\hat{f} = \|f\|_p^{1-p}\text{signo}(f)|f|^{p-1}$ está en L^q, cumple que $\|\hat{f}\|_q = 1$ y se cumple que $\int f\hat{f} = \|f\|_p$.)

9. *a*) Considerar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dada por una matriz triangular superior con entradas 1 en la diagonal (es decir, la matriz asociada $(a_{ij})_{ij}$ a T cumple que $a_{ii} = 1$ para todo $1 \leq i \leq d$ y $a_{ij} = 0$ si $i > j$). Usando el teorema de Fubini iteradamente demostrar que si E es un conjunto medible entonces $T(E)$ también lo es y $m(E) = m(T(E))$.
   b) Mostrar lo mismo para matrices triangulares inferiores con entradas 1 en la diagonal.
   c) Demostrar que si $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es una transformación lineal entonces se descompone como $PD_i\Delta D_s$ donde D_i es triangular inferior con 1's en la diagonal, Δ es una matriz diagonal, P es una matriz de permutación y D_s es triangular superior con 1's en la diagonal.
   d) Deducir que si $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es una transformación lineal y E un conjunto medible, entonces $T(E)$ es medible y $m(E) = |det(T)|^{-1}m(T(E))$.
   e) Concluir que la medida de Lebesgue es invariante por isometrías de $\mathbb{R}^d$.

10. Usar el ejercicio anterior para mostrar que si f es una función integrable en $\mathbb{R}^d$ y T una transformación lineal de $\mathbb{R}^d$, entonces $f \circ T$ es integrable y se cumple que:

$$\int f \circ T = |det(T)|^{-1} \int f$$

11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como
   - $f(x, y) = 2 - 2^{-n}$ si $(x, y) \in [n, n+1]^2$ para algún $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,
   - $f(x, y) = 2^{-n} - 2$ si $(x, y) \in [n, n+1] \times (n+1, n+2]$ para algún $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ y
   - $f(x, y) = 0$ si no.

   a) Mostrar que para todo $y \in \mathbb{R}$ se cumple que la función $x \mapsto f(x, y)$ es integrable y calcular $F(y) = \int f(x, y)dm(x)$.
   b) Mostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que la función $y \mapsto f(x, y)$ es integrable y calcular $G(x) = \int f(x, y)dm(y)$.
   c) Mostrar que las funciones F y G son integrables pero $\int F \neq \int G$.
   d) Explicar porqué no aplica el Teorema de Fubini.

12. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función integrable. Mostrar que si $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |f(x)| > \alpha\}$ entonces $\int |f| = \int_0^\infty m(E_\alpha)d\alpha$.

13. *a*) Sea E un boreliano de $\mathbb{R}^2$ y para $y \in \mathbb{R}$ definimos $E^y \subset \mathbb{R}$ dado por $E^y = \{x \in \mathbb{R} \ : \ (x, y) \in E\}$. Mostrar que E^y es un boreliano. (Sugerencia: Mostrar que los abiertos tienen esa propiedad y que los conjuntos con dicha propiedad son una σ-álgebra.)
   b) Construir un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ medible Lebesgue tal que para algún $y \in \mathbb{R}$ el conjunto E^y no es medible.

14. Sea f integrable en $\mathbb{R}^d$ y $\delta = (\delta_1; \ldots; \delta_d) \in \mathbb{R}^d$ con $\delta_i \neq 0$. Definimos $f^\delta(x) := f(\delta_1 x_1; \ldots; \delta_d x_d)$. Probar que f^d es integrable y

$$\int f^\delta = |\delta_1|^{-1} \ldots |\delta_d|^{-1} \int f$$

15. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función medible tal que la función $g(x,y) : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = |f(x) - f(y)|$ es integrable. Entonces f es integrable.

16. Sean $X : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ e $Y : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ variables aleatorias. Llamemos $m_{[0,1]^2}$ a la medida de Lebesgue en $[0,1]^2$, y m a la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Decimos que X e Y son independientes si

$$m_{[0,1]^2}\{\omega; X(\omega) \in A, Y(\omega) \in B\} = m\{\omega; X(\omega) \in A\}\ m\{\omega; Y(\omega) \in B\},\ \forall A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

   a) Dar un ejemplo de un par de variables aleatorias con dicha propiedad.

   b) Demostrar que si X e Y son independientes $E(X.Y) = EX.EY$.

17. **Funciones convexas** Una función $f : I \to \mathbb{R}$ (con $I \subset \mathbb{R}$ conexo) es *convexa* si para todo $x, y \in I$ y $0 \leq t \leq 1$ se cumple que $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

   a) Buscar una interpretación geométrica de que una función sea convexa.

   b) Mostrar que la función $|x|^p$ con $p \geq 1$ es convexa en $\mathbb{R}$, $-\log x$ es convexa en $(0, +\infty)$ y la función $x \log x$ en $[0, \infty)$ (donde consideramos $0 \log 0 = 0$).

   c) Mostrar que para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ existe (al menos) una función lineal $g(x) = ax + b$ de forma tal que $g(x_0) = f(x_0)$ y tal que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   d) Si f tiene un mínimo local en x_0 entonces es un mínimo global.

   e) **Desigualdad de Jensen** Si $\varphi : [0,1] \to I$ es integrable, entonces se cumple que $f\left(\int_0^1 \varphi(t)dt\right) \leq \int_0^1 f \circ \varphi(t)dt$. (Sugerencia: Considerar g lineal que $g(\int \varphi) = f(\int \varphi)$ y tal que $g(x) \leq f(x)$ y usar que las funciones lineales entran y salen libremente de las integrales.)

   f) **Rigidez** Estudiar en que condiciones puede ocurrir la igualdad en la desigualdad de Jensen.