Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción al Análisis Real–Curso 2019

Práctico 5: Densidad y Diferenciación en $\mathbb{R}^d$

El plazo para entregar este práctico es el 12 de junio de 2019. Se debe entregar el ejercicio 1.

1. Sea $E \subset \mathbb{R}$ tal que 0 es un punto de densidad de Lebesgue para E. Probar que:

   a) Existe una sucesión $\{x_n\} \subset E$ tal que $x_n \neq 0$ para todo n, $x_n \to 0$ y $-x_n \in E$ para todo n.

   b) Existe una sucesión $\{x_n\} \subset E$ tal que $x_n \neq 0$ para todo n, $x_n \to 0$ y $2x_n \in E$ para todo n.

2. Probar que si $E \subset [0,1]$ es medible y existe $\alpha > 0$ tal que $m(E \cap I) \geq \alpha m(I)$ para todo intervalo $I \subset [0,1]$ entonces $m(E) = 1$.

3. Sea $F \subset \mathbb{R}$ un cerrado y $\delta(x) = d(x,F)$. Probar que $\delta(x+y)/|y| \to 0$ cuando $|y| \to 0$, para c.t.p. $x \in F$.

4. Decimos que $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ es un *cubrimiento regular* de $E \subset \mathbb{R}^d$ si se cumple que:

   - Existe $c > 0$ tal que para todo $\alpha \in \mathcal{I}$ se cumple que existe una bola B_α de $\mathbb{R}^d$ tal que $U_\alpha \subset B_\alpha$ y se tiene que $m(U_\alpha) > cm(B_\alpha)$.
   - Para todo $x \in E$ y $\eta > 0$ se cumple que existe $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_\alpha$ y $m(U_\alpha) < \eta$.

   Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ medible tal que $0 < m^*(E) < \infty$ y $\mathcal{U}$ un cubrimiento regular de E donde todos sus elementos U_α son cerrados . Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia disjunta numerable $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots \in \mathcal{U}$ tal que

$$m(E \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i)) = 0 \quad y \quad \sum_{i=1}^{\infty} m(U_i) \leq (1+\varepsilon) m^*(E)$$

5. Llamamos *base de Vitali*[1] a una familia de subconjuntos abiertos $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n>0}$ de $\mathbb{R}^d$ cuyos diametros tienden a 0 y de forma tal que $V_n \to 0$. Dado un conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^d$ definimos los *puntos de densidad respecto a* $\mathcal{V}$ como:

$$D_{\mathcal{V}}(A) := \{x \in \mathbb{R}^d : \lim_n \frac{m(A \cap (V_n + x))}{m(V_n)} = 1\}.$$

   Decimos que una base de Vitali es de *Lebesgue-Vitali* si se cumple que $m(A \Delta D_{\mathcal{V}}(A)) = 0$ para todo A medible. Denotamos $D(A)$ como el conjunto de puntos de densidad de Lebesgue definidos como los $x \in \mathbb{R}^d$ tales que:

[1] Nota: Los nombres asignados en este ejercicio no son universales. Por favor no repetir :).

$$\lim_{r\to 0} \frac{m(A\cap B(x,r))}{m(B(x,r))} = 1.$$

donde $B(x,r)$ denota la bola de centro x y radio r en $\mathbb{R}^d$.

a) Mostrar que la base $\mathcal{V} = \{B(0,\frac{1}{n})\}$ cumple que $D_{\mathcal{V}}(A) = D(A)$ para todo $A \subset \mathbb{R}^d$ medible. En particular, es una base de Lebesgue-Vitali.

b) Mostrar que una base $\mathcal{V} = \{B(0,r_n)\}$ tal que $\lim_n r_n = 0$, cumple que $D_{\mathcal{V}}(A) = D(A)$ para todo $A \subset \mathbb{R}^d$ medible si y solo si existe $\delta > 0$ tal que $\delta r_{n+1} > r_n$. ¿Son siempre bases de Lebesgue-Vitali?

c) Mostrar que si dos bases de Vitali $\mathcal{V} = \{V_n\}$ y $\mathcal{W} = \{W_n\}$ cumplen que $\frac{m(V_{n+1})}{m(V_n)}$ y $\frac{m(W_{n+1})}{m(W_n)}$ están acotadas por debajo por $\delta > 0$ y se cumple que para todo $n > 0$ existe $k > 0$ tal que $V_{n+k} \subset W_n$ y $W_{n+k} \subset V_n$ entonces $D_{\mathcal{V}}(A) = D_{\mathcal{W}}(A)$ para todo conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^d$.

d) Mostrar que la base de rectángulos $\mathcal{R} = \{[0,a_n]\times[0,b_n]\}$ con $a_n = \sigma^n$ y $b_n = \eta^n$ con $0 < \sigma \leq \eta < 1$ es una base de Lebesgue-Vitali. Comparar con [Problema 8, Cap. 3 [RA]].

e) (*) Construir una base de Vitali que no sea de Lebesgue-Vitali. (Sugerencia: Buscar en internet sobre el *Nykodym set* y el *Kakeya needle problem.*)

6. (**Teorema de cubrimiento de Besicovitch-Problema 3 Cap. 3 [RA]**) Para todo $d \geq 1$ existe $C_d \geq 1$ tal que si $E \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto acotado y $\mathcal{B}$ es un cubrimiento por bolas de E tal que para todo $x \in E$ hay al menos una bola en $\mathcal{B}$ centrada en x, entonces, existen $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_{C_d} \subset \mathcal{B}$ subfamilias finitas con las propiedades siguientes:

- cada subfamilia $\mathcal{B}_i$ cumple que sus elementos son disjuntos,
- todo punto $x \in E$ pertenece a al menos una bola de alguna de las subfamilias.

7. Sea $S^1 = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ y sea $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Consideramos $f : S^1 \to S^1$ dado por $f(x) = x + \theta (\text{mod} 1)$.

a) Mostrar que f es un homeomorfismo que preserva la medida de Lebesgue y que para todo $x \in S^1$ la *órbita* de x (i.e. $\{f^n(x)\}_n$) es densa en S^1. (Sugerencia: Por absurdo, suponer que hay un intervalo que la clausura de la órbita no corta, probar que es periódico y que eso implica que θ es racional.)

b) Sea $E \subset S^1$ medible y sea $h_r : S^1 \to [0,1]$ definida por $h_r(x) = \frac{m(E\cap(x-r,x+r))}{2r}$. Mostrar que h_r es continua para todo r.

c) Usar la primera parte para deducir que si E es invariante (i.e. $f(E) \subset E$) entonces h_r es constante para todo r.

d) Deducir que f es *ergódica*, es decir, que todo conjunto medible f-invariante mide 0 o 1.

e) Mostrar que si $\varphi \in L^1(S^1)$ cumple que $\varphi \circ f = \varphi$ m-ctp, entonces φ es constante m-ctp.