Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción al Análisis Real–Curso 2019

Práctico 6: Diferenciación, Continuidad absoluta y Variación Acotada

El plazo para entregar este práctico es el 15 de junio de 2019. Entregar tres ejercicios a elección entre el 5 y el 12 (inclusive).

1. Sea $a_n = 10^{-n}$ y $b_n = 10^{n^2}$. Mostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \cos(b_n x)$ es uniformemente continua pero no es derivable en ningún punto.

2. Construir una función creciente en los reales tal que su conjunto de discontinuidades sea exactamente el conjunto de los racionales.

3. Sea $F(x) = x^a \sin(1/x^b)$ si $x \neq 0$ y $F(0) = 0$, definida en el intervalo $[0, 1]$. Probar que es de variacion acotada sii $a > b$,

4. Probar directamente (a partir de la definición) que la función de Cantor-Lebesgue no es absolutamente continua.

5. Probar que si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es continua, entonces la función $f^+(x) = \limsup_h \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ definida de (a, b) en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es medible.

6. Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, entonces:

   a) f lleva conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero,

   b) f lleva conjuntos medibles (Lebesgue) en conjuntos medibles (Lebesgue).

7. *a*) Probar que existe una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua, estrictamente creciente y $F'(x) = 0$ en un conjunto de medida positiva.

   Sugerencia: Sea K el complemento de un conjunto de Cantor de medida positiva en $[a, b]$. Tomar $F(x) = \int_a^x \chi_K(t)dt$.

   b) Probar que existe una función como en la parte anterior, que además cumple que existe $E \subset [F(a), F(b)]$ medible tal que $m(E) = 0$ y $F^{-1}(E)$ es no medible.

   c) Probar que, para cualquier $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente y absolutamente continua se cumple que si $E \subset [F(a), F(b)]$ es medible entonces $F^{-1}(E) \cap \{F' > 0\}$ es un conjunto medible.

   Sugerencia: Probar que si $U \subset [F(a), F(b)]$ es abierto entonces $m(U) = \int_{F^{-1}(U)} F'(x)dx$.

8. Sea F absolutamente continua y creciente en $[a, b]$, $A = F(a)$, $B = F(b)$, y sea $f : [A, B] \to \mathbb{R}$ medible.

   - Probar que $f(F(x))F'(x)$ es medible en $[a, b]$.
   - Probar que si f es integrable en $[A, B]$, entonces $f(F(x))F'(x)$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_A^B f(y)dy = \int_a^b f(F(x))F'(x)dx$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que f es una función globalmente Lipschitz (existe $M \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo x, y) sii f es absolutamente continua y $|f'(x)| \leq M$ c.t.p. x.

10. (Ejercicio 24, Cap. 3 de [RA]) Sea F una función real y creciente definida en $[a, b]$.

    (a) Probar que podemos escribir

    $$F = F_A + F_C + F_J,$$

    donde cada función F_A, F_C, F_J es creciente y verifica:

    (i) F_A es absolutamente continua,

    (ii) F_C es continua pero $F_C' = 0$ c.t.p.(Lebesgue)

    (iii) F_J es una función de saltos (es decir, se escribe como una serie de saltos puros, ver pag. 132).

    La descomposición anterior se llama *descomposición de Lebesgue* de F. Existe una descomposición análoga para F de variación acotada.

11. (Ejercicio 11 Cap. 6 de [RA]) Sea F una función creciente y normalizada en $\mathbb{R}$, y sea $F = F_A + F_C + F_J$ la descomposición de Lebesgue del ejercico anterior. Sea $\mu = \mu_A + \mu_C + \mu_J$ donde μ, μ_A, μ_C, μ_J son las medidas de Borel asociadas a F, F_A, F_C, F_J respectivamente. Verificar:

    (i) μ_A es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, y $\mu_A(E) = \int_E F'(x)dx$, para todo E Lebesgue medible.

    (ii) Como resultado, si F es absolutamente continua, tenemos $\int f d\mu = \int f dF = \int f(x)F'(x)dx$ siempre que f y fF' sea integrables respecto de μ y de la medida de Lebesgue respectivamente.

    (iii) $\mu_C + \mu_J$ y la medida de Lebesgue son singulares.

12.
    - Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e^{2^{n+1}\pi i x}$. Probar que f no es derivable en ningún punto.
    - ¿Existe una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ que sea derivable, con derivada acotada y tal que f' no es una función integrable Riemann? ¿Y si en la pregunta anterior sustituimos Riemann por Lebesgue?

13. Considerar una enumeración $\{q_n\}_{n\geq 1}$ de los racionales. Sea la función $f(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-n^2|x-q_n|^2}$. Mostrar que f está bien definida y es finita en m-ctp. Mostrar que es integrable pero que es no acotada en todo intervalo de $\mathbb{R}$.

14. Mostrar que la función $x \mapsto \sqrt{x}$ es absolutamente continua en $[0, 1]$ (sugerencia: Es primitiva de una función en L^1). Notar que dado $\delta > 0$ se cumple que si se toma $(a_i, b_i) = (0, \delta/n)$ con $1 \leq i \leq n$ tenemos que la suma de las longitudes es δ pero $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| = \sqrt{N\delta}$. Esto muestra la importancia de que los intervalos sean disjuntos en la definición de continuidad absoluta.

15. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que la derivada f' existe en **todo** punto y es integrable. Mostrar que f es absolutamente continua.

16. Decimos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es *Hölder continua* de exponente $\alpha \in (0, 1]$ si se cumple que existe $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}$ (nota: cuando $\alpha = 1$ esto también se conoce como *función Lipschitz*). Usando la desigualdad de Hölder mostrar que si f es absolutamente continua y $f' \in L^p$ entonces f es α-Hölder con $\alpha = 1 - 1/p$. Mostrar que si $p = \infty$ entonces f es Lipschitz y dar ejemplos donde $p = 1$ y f no es Hölder para ningún exponente.

17. **Funciones convexas, (c.f. Práctico 4)** Mostrar que una función real es convexa si y solamente si es absolutamente continua y su derivada f' es no decreciente. Mostrar que si f es convexa entonces f'' existe m-ctp y cumple $f'' \geq 0$.