Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción al Análisis Real–Curso 2019

Práctico 7: Medidas abstractas.

Se debe entregar un ejercicio a elección antes del final del curso.

1. Sea $(X, \mathcal{Q})$ un espacio de medida y $\mu : \mathcal{Q} \to [0, +\infty]$ una medida. Definimos $\overline{\mathcal{Q}}$ como la familia de conjuntos de la forma $A \cup Z$ donde $A \in \mathcal{Q}$ y $Z \subset F$ con $\mu(F) = 0$. Definimos $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{Q}} \to [0, \infty]$ como $\overline{\mu}(A \cup Z) = \mu(A)$:

   a) Probar que $\overline{\mathcal{Q}}$ es una σ-álgebra y $\overline{\mu}$ una medida (en particular, está bien definida).

   b) Probar que $\overline{\mu}$ es *completa* (es decir, si $E \in \overline{\mathcal{Q}}$ tiene medida cero, todos sus subconjuntos son medibles).

   c) Mostrar que $\overline{\mathcal{Q}}$ es la menor σ-álgebra para la cual se puede extender μ a una medida completa.

   d) Dar un ejemplo mostrando que μ se pueda extender a una σ-álgebra aún mayor.

2. Mostrar que la σ-álgebra de Lebesgue $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$ coincide con la σ-álgebra de los Caratheodory medibles con respecto a la medida exterior dada por la premedida en el álgebra de las uniones finitas de cubos dada por su volúmen.

3. Dar un ejemplo de una premedida en un álgebra que pueda ser extendida de más de una manera a la σ-álgebra generada. (Nota: Recordar que necesariamente no será σ-finita.)

4. Mostrar que $\mathcal{A}$, el conjunto de las uniones finitas de rectángulos en $X_1 \times X_2$ forman un álgebra.

5. Sea $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ un espacio de medida y $\varphi : X \to [0, +\infty]$ una función medible. Mostrar que μ_φ definida en $\mathcal{Q}$ como

$$\mu_\varphi(E) = \int_E \varphi d\mu \qquad , \quad \forall E \in \mathcal{Q}$$

   es una medida positiva y que si $f : X \to [0, +\infty]$ es una función medible cualquiera se cumple que

$$\int_E f d\mu_\varphi = \int_E \varphi f d\mu.$$

6. Sea $M \subset \mathbb{R}^d$ una variedad diferenciable de dimensión k. ¿Cómo se podría definir una medida de volúmen en M?

7. Sea $\sharp$ la medida de conteo en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Mostrar que convergencia en medida y convergencia uniforme coinciden.

8. Sea ν una medida signada y μ una medida positiva. Mostrar que si $\nu \perp \mu$ y $\nu \ll \mu$ entonces $\nu = 0$.

9. Mostrar que $\nu \ll \mu$ si y solo si $|\nu| \ll \mu$ si y solo si $\nu^+ \ll \mu$ y $\nu^- \ll \mu$.

10. Sea $f \in L^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$. Mostrar que existe una medida σ-finita $\hat{\mu}$ tal que para todo $E \in \mathcal{Q}$ se cumple que $\int_E f d\mu = \int_E f d\hat{\mu}$.

11. Mostrar que si $\lambda \perp \mu$ son medidas finitas en $(X, \mathcal{Q})$ entonces no existe una función $f \in L^1(X, \mathcal{Q}, \mu)$ tal que $d\lambda = f d\mu$.

12. Sea μ una medida σ-finita en $(X, \mathcal{Q})$ y ν la medida en $\mathcal{Q}$ definida como $\nu(E) = 0$ si $\mu(E) = 0$ y $\nu(E) = \infty$ si $\mu(E) > 0$.

    a) Mostrar que efectivamente ν es una medida.
    b) Mostrar que $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \nu$.
    c) Estudiar las descomposiciones de Radon-Nikodym de ν respecto a μ y de μ respecto a ν.

13. Mostrar que el Teorema de Radon-Nikodym vale para medidas σ-finitas. Esto incluye adaptar el enunciado. (Por ejemplo, si $\nu \ll \mu$ y ν no es finita, la función tal que $d\nu = f d\mu$ no puede estar en L^1, ¿dónde tiene que estar?)

14. Mostrar que si $\mu_1 \ll \mu_2 \ll \mu_3$ son medidas σ-finitas (y μ_2 y μ_3 son positivas) entonces vale que
$$\frac{d\mu_1}{d\mu_3} = \frac{d\mu_1}{d\mu_2}\frac{d\mu_2}{d\mu_3}$$

15. Extender los resultados acerca de medidas signadas a medidas complejas.

16. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de medida con $P(\Omega) = 1$. Dada X una función medible tal que $E \mid X \mid < \infty$ y $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ una sigma-álgebra,

    a) Probar que existe una única (a menos de un conjunto de medida nula) función $\mathcal{D}$-medible la cual denotaremos $E(X \mid \mathcal{D})$ que cumple:
    $$\int_D E(X \mid \mathcal{D})\, dP = \int_D X\ dP \ \forall D \in \mathcal{D}.$$
    Dicha función se le llama esperanza condicional de X respecto a $\mathcal{D}$).
    b) i) Deducir que si X es $\mathcal{D}$-medible $\Rightarrow X = E(X \mid \mathcal{D})$.
       ii) Probar que si $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{A} \Rightarrow E(E(X \mid \mathcal{D}_1) \mid \mathcal{D}_2) = E(X \mid \mathcal{D}_1)$
    c) Supongamos ahora que Y es otra variable aleatoria que toma valores en $I = \{i_0, i_1, ..\}$ un conjunto numerable. Denotemos $D_K = \{Y^{-1}(i_k)\}$, $\sigma(Y) = \{D = \cup_{K \in \mathbf{K}} D_K, \mathbf{K} \subset I\ \}$.
    Se puede probar que $\sigma(Y)$ es la mínima σ-álgebra que hace medible a Y (esto no

se pide probar en este ejercicio).
Probar que:

$$E(X \mid \sigma(Y))(\omega) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{E(X\mathbf{1}_{D_K})}{P(D_k)}\mathbf{1}_{D_K}(\omega).$$

17. En este ejercicio usamos la notación del anterior.

    a) Si $Z \in \mathcal{L}^2(P, \mathcal{D}, \Omega) \Rightarrow E(Z(X - E(X \mid \mathcal{D}))) = 0$

    b) Probar que si $Y \in \mathcal{L}^2(P, \mathcal{D}, \Omega), X \in \mathcal{L}^2(P, \mathcal{A}, \Omega)$ $(\mathcal{D} \subset \mathcal{A})$ entonces:

    $$E((X - E(X \mid \mathcal{D}))^2) \leq E((X - Y)^2.)$$

    c) Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{S}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. Probar que dada $f \in \mathcal{H}$ $\exists!$ g_0 que cumple:

    $$|| f - g_0 || = \inf_{g \in \mathcal{S}} || f - g || .$$

    Llamamos g_0 la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{S}$.
    Sugerencia: usar ley del paralelogramo.

    d) Probar que (bajo hipótesis de ejercicio anterior) si $\mathcal{D} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{L}^2(P, \mathcal{D}, \Omega)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}^2(P, \mathcal{A}, \Omega)$.

    e) Concluir que si $X \in \mathcal{L}^2(P, \mathcal{A}, \Omega)$ entonces $E(X \mid \mathcal{D})$ es la proyección ortogonal de X en $\mathcal{D}$.

18. Sea $C^0([0,1])$ el espacio vectorial de funciones continuas $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ con la norma del supremo $\|\varphi\| = \max_{t \in [0,1]}\{|\varphi(t)|\}$.

    a) Sea ν una medida signada de Borel en $[0,1]$. Mostrar que la transformación $T : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}$ dada por

    $$T(\varphi) = \int_0^1 f d\nu$$

    es lineal y continua. Además, se cumple que $|T(\varphi)| \leq \|\varphi\|$.

    b) Dada una transformación lineal y continua $T : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}$, demostrar que existe ν medida signada de Borel en $C^0([0,1])$ tal que $T(\varphi) = \int_0^1 f d\nu$. (Sugerencia: Construir una premedida en los intervalos mediante aproximaciones de las funciones características por funciones continuas. Mostrar que no depende de la aproximación usando Egoroff.)

    c) Mostrar que si ν es la medida signada de Borel asociada a T entonces

    $$|\nu|([0,1]) = \sup_{\varphi \in C^0([0,1]) \setminus \{0\}} \{\frac{|T(\varphi)|}{\|\varphi\|}\}.$$

19. (Ejercicio 8, Cap. 6 de [RA]) La unicidad de la medida de Lebesgue caracterizada por invariancia mediante traslaciones se puede hacer precisa en la siguiente afirmación: Si μ es una medida de Borel en $\mathbb{R}^d$ que es invariante por traslaciones, y es finita en conjuntos compactos, entonces es un múltiplo de la medida de Lebesgue. Probar este teorema (ver las sugerencias de [RA])

20. (**Integral de Riemann-Stiejles**, ver [RA] Capítulo 6, Sección 3.3) Mostrar que hay una correspondencia bi-unívoca entre las medidas signadas finitas de Borel en $\mathbb{R}$ y las funciones de variación acotada.

21. ($*$) (**Medida de Haar**) Sea G un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff[1]. Mostrar que existe una única medida de Borel invariante por translaciones que es de Radón (finita en compactos). *Sugerencia:* Comenzar por el caso en que G es compacto y considerar, para una sucesión U_n de entornos de la identidad, la cantidad λ_K^n que consiste en el cociente entre el ínfimo de la cantidad de trasladados de U_n necesarios para cubrir un compacto K y el infimo de la cantidad de trasladados de U_n necesarios para cubrir G. Utilizar esta cantidad para construir una medida métricamente exterior. (Otra sugerencia, es buscar este resultado clásico en algún libro, y si saben que es un grupo de Lie, pensar en ese caso particular que puede ser más sencillo dependiendo de su formación previa.)

[1] Si no conoce la definición, está disponible en Wikipedia. Siempre es conveniente el material en inglés, con lo cual conviene buscar *locally compact topological group.*