Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Práctico 9

1. Hallar las formas de Jordan de las siguientes matrices.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -13 & -1 & 16 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En cada uno de los casos siguientes encontrar la forma canónica de Jordan y una base de Jordan.

   a) $T = L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   b) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ definido por $T\big(p(x)\big) = p'(x) + 2p(x)$.

   c) $T = L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -4 & 6 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Para cada una de las siguientes matrices A, encontrar su forma de Jordan J y una matriz Q tal que $J = Q^{-1} A\, Q$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. ¿Cuáles de las siguientes matrices son semejantes entre sí?

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Sean V un espacio que tiene una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ tales que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) Definimos $w_3 = v_1 + 2v_2 + v_3$ y $w_4 = 2v_1 + v_2 - v_4$. Probar que $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, w_3, w_4\}$ es una base de V y calcular $[T]_{\mathcal{C}}$.

   b) Hallar la forma de Jordan de T y una base de Jordan correspondiente.

6. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (-y-z,\, x+y,\, y+2z), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Hallar su forma de Jordan y una base de Jordan correspondiente.

7. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar su forma de Jordan J. *Sugerencia:* tener en cuenta el ejercicio anterior.

   b) Hallar una matriz invertible Q tal que $A = QJQ^{-1}$.

8. Sea $\mathcal{F}$ el espacio de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se considera el subespacio V de $\mathcal{F}$ generado por las funciones $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{F}$, definidas por

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = xe^x, \quad f_3(x) = x^2 e^x, \quad f_4(x) = e^{2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   a) Probar que $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ es un conjunto LI.

   b) Probar que si $f \in V$, entonces $f' \in V$ (f' es la derivada de f).

   c) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ definida por $T(f) = f'$. Encontrar la forma de Jordan de T y una base de Jordan correspondiente.

9. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de un espacio V y $T \in \mathcal{L}(V)$ tales que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

   Probar que si $\mathcal{C} = \{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_2, v_1\}$, entonces $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$.

10. Sea $A \in M_n(\Bbbk)$ tal que su polinomio característico se escinde.

    a) Probar que A^t es semejante a J^t, siendo J la forma de Jordan de A.

    b) Deducir que existe una base $\mathcal{B}$ de $\Bbbk^n$ tal que $[L_{A^t}]_{\mathcal{B}} = J^t$.

    c) Probar que existe una base $\mathcal{D}$ de $\Bbbk^n$ tal que $[L_{A^t}]_{\mathcal{D}} = J$.
    Sugerencia: recordar el ejercicio anterior.

    d) Probar que A y A^t tienen la misma forma de Jordan.

    e) Concluir que A y A^t son semejantes.