Nombre:	CI:

Examen 23 de Febrero de 2023

Ejercicio 1 Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ (desconocido).

(a) Calcular el estimador de λ basado en el primer momento para una muestra iid $X_1, \ldots, X_{20}$, cuyo promedio es 2,5.

(b) Calcular $\mu_2 = \mathbb{E}(X^2)$.

(c) Calcular un estimador para μ_2.

Ejercicio 2 Una compañía aérea sabe por experiencia que el 12 % de las reservas telefónicas de lugares no se llevan a efecto, de modo que reserva más plazas de las que dispone. Si en un vuelo hay 150 plazas, utilizando el teorema central del límite [1] responder

(a) ¿cuántas reservas puede hacer la compañía para que la probabilidad de cubrir al menos 145 lugares sea del 99 %?

(b) Si la compañía reserva 160 lugares, ¿cuál es la probabilidad de que, al menos un pasajero no tenga lugar disponible?

Ejercicio 3 Se realiza un estudio para establecer una ecuación mediante la cual se pueda utilizar la *concentración de estrona en saliva* para predecir la *concentración del esteroide en plasma libre*. Se obtuvieron los siguientes datos de 14 varones sanos:

Concentración de estrona en saliva (pg/ml)	Concentración de esteroide en plasma libre (pg/ml)
7.4	30.0
7.5	25.0
8.5	31.5
9.0	27.5
9.0	39.5
11.0	38.0
13.0	43.0
14.0	49.0
14.5	55.0
16.0	48.5
17.0	51.0
18.0	64.5
20.0	63.0
23.0	68.0

(a) Indicar cuál sería la variable explicativa (X) y cuál la variable explicada (Y) en un modelo de regresión lineal para estos datos.

(b) Calcular los estimadores $\hat{a}$ y $\hat{b}$ y hallar la recta de regresión lineal.

(c) ¿Qué concentración de esteroide en plasma libre podría esperar para un varón cuya concentración de estrona en saliva sea de 12.0 pg/ml?

[1] *Datos que pueden ser útiles:*
qnorm(0.01)=-2.33, qnorm(0.90)=1.28, qnorm(0.95)=1.65, qnorm(0.975)=1.96, qnorm(0.99)=2.33
pnorm(0.20)= 0.58, pnorm(0.81)=0.79, pnorm(2.48)=0.99

SOLUCIÓN

Ejercicio 1 Sea X una variable Poisson λ.

(a) Planteamos $\bar{x}_{20} = \mathbb{E}(X) \Leftrightarrow \bar{x}_{20} = \lambda \Leftrightarrow \hat{\lambda} = 2{,}5$.

(b) Como $var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, planteamos:

$$\mu_2 = \mathbb{E}(X^2) = var(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda + \lambda^2$$

(c) Estimamos μ_2 por $\hat{\mu}_2 = 2{,}5 + 2{,}5^2 = 8{,}75$

Ejercicio 2 Sea $X_1, \ldots, X_n$ tales que n es la cantidad de reservas y

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si la persona } i \text{ reserva un lugar y lo usa} \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces $X_i \sim Ber(p)$ con $p = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$.

(a) Buscamos n tal que $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq 145) = 0{,}99$. Por el TCL sabemos que $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \approx N(0,1)$ con $\mu = \mathbb{E}(X_1) = p$ y $\sigma^2 = var(X_1) = p(1-p)$. Luego, planteamos:

$$\begin{aligned} 0{,}99 = \mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \frac{145}{n}) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\frac{145}{n} - \mu)\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\frac{145}{n} - p)\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\frac{145}{n} - p)\right) \end{aligned}$$

Entonces

$$1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\frac{145}{n} - p)\right) = 0{,}99 \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\frac{145}{n} - p)\right) = 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow pnorm\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\frac{145}{n} - p)\right) = 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\frac{145}{n} - p) = qnorm(0{,}01)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\frac{145}{n} - p) = -2{,}32 \Leftrightarrow \frac{145 - np}{\sqrt{n}} = -2{,}32\sigma \Leftrightarrow np - 2{,}32\sigma\sqrt{n} - 145 = 0$$

Hacemos el cambio $x = \sqrt{n}$ y queremos resolver

$$px^2 - 2{,}32\sigma x - 145 = 0 \Leftrightarrow 0{,}88x^2 - 0{,}77x - 145 = 0 \Leftrightarrow x = 13{,}28 \text{ ó } x = -12{,}41$$

Como tiene que ser $x = \sqrt{n} > 0$, nos quedamos con $x = 13{,}28 \Leftrightarrow n = 176{,}36$ y tomamos $n = 177$.

(b) Si $n = 160$, queremos calcular la probabilidad de que al menos un pasajero se quede sin asiento, es decir, que $X_1 + \cdots + X_{160} \geq 151$. Nuevamente, usamos el TCL:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_{160} \geq 151\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{p(1-p)}}(\bar{X}_{160} - p) \geq \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{p(1-p)}}(\frac{151}{160} - p)\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{p(1-p)}}(\frac{151}{160} - p)\right) = \mathbb{P}(Z \geq 2{,}48) \\ &= 1 - pnorm(2{,}48) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \end{aligned}$$

Ejercicio 3

(a) La variable explicativa es $X=$ concentración de estrona en saliva (primer columna) y la variable explicada es $Y=$ concentranción de esteroide en plasma libre (segunda columna).

(b) La recta de regresión es $y = \hat{a}x + \hat{b}$ con $\hat{a}$ y $\hat{b}$ tales que:

$$\hat{a} = \frac{\frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}_n \bar{y}_n}{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - (\bar{x}_n)^2} \qquad \hat{b} = \bar{y}_n - \hat{a}\bar{x}_n$$

Calculamos:

- $\bar{x}_n = 13{,}42$
- $\bar{y}_n = 45{,}25$
- $\frac{1}{n}\sum x_i y_i = 669{,}20$
- $\frac{1}{n}\sum x_i^2 = 202{,}82$
- $\hat{a} = 2{,}73$
- $\hat{b} = 8{,}65$

(c) A partir de la recta de regresión esperamos $y = \hat{a}12{,}0 + \hat{b} = 41{,}37$ pg/ml.