Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Práctico 1: Preliminares, conjuntos de Cantor y medida exterior

Varios de los ejercicios están tomados del (Capítulo 1 del) libro [RA]: "Real Analysis"de Stein y Shakarchi. Se sugiere consultarlo, dado que el libro contiene sugerencias y ejercicios relacionados que pueden ser de ayuda. Otros ejercicios tienen pre-requisitos de Topología, se indican con una [T].

1. **Conjunto de Cantor** (Ejercicios 1, 2, y 3 de [RA]).

   Definimos una sucesión de subconjuntos de $[0,1]$ de la siguiente manera:

   $C_0 = [0,1]$ y para $k > 0$ el conjunto C_k es el conjunto que se obtiene quitando de cada componente de C_{k-1} el intervalo central abierto de proporción[1] $\xi = 1/3$.

   a) Probar que $C = \cap_{n=0}^{\infty} C_n \subset [0,1]$ es un conjunto no vacío, compacto, perfecto y totalmente disconexo[2].

   b) Probar que el complemento de C en $[0,1]$ es una unión numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos, y que la suma de las longitudes de todos esos intervalos es igual a 1.

   c) Todo real $x \in [0,1]$ tiene una expansión ternaria de la forma

   $$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k},$$

   donde $a_k \in \{0,1,2\}$ para todo k (observar que esta expansión no es única. Por ejemplo, $1/3 = \sum_{k=2}^{\infty} 2/3^k$). Probar que $x \in C$ si y sólo si x tiene una expansión ternaria donde no aparece el dígito 1 . Concluir que C es un conjunto no numerable.

   d) **Función de Cantor-Lebesgue**.
   Sea $F : C \longrightarrow [0,1]$ definida como

   $$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k},$$

   donde $b_k = a_k/2$ y $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k/3^k$ es una expansión ternaria de x tal que $a_k \in \{0,2\}$ para todo k. Probar que F es continua, sobreyectiva, creciente y que $F(0) = 0$, $F(1) = 1$.

   e) Mostrar que la función anterior se puede extender a una función continua en todo $[0,1]$ que es constante en cada componente conexa del complemento de C. Graficar.

   f) [T] Sea $\Omega_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n = 0, 1\}$ el conjunto de las sucesiones de ceros y unos. El conjunto Ω_2 es el producto cartesiano de copias del espacio discreto $\{0,1\}$ indexado en los naturales, y por lo tanto es un espacio topológico compacto con la topología producto. Se puede demostrar que Ω_2 es metrizable, y una métrica viene dada por $d(x,y) = \sum_{n \geq 1} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$. La topología de Ω_2 está generada por los *cilindros*

   $$c_{n_1,\ldots,n_k}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k} = \{x \in \Omega : x_{n_i} = \varepsilon_i\},$$

   donde $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. En la construcción del conjunto de Cantor, C_1 es una unión de 2^1 intervalos cerrados. Llamaremos I_0 al que está a la izquierda e I_1 al que está a la derecha. Luego, C_2 es

[1] Si I es un intervalo, *el intervalo central abierto de proporción ξ en I* es el intervalo abierto I' centrado en el punto medio de I tal que $|I'| = \xi \cdot |I|$.

[2] Un conjunto $A \subset [0,1]$ es *perfecto* si contiene a todos sus puntos de acumulación, es decir, si no contiene puntos aislados. Es *totalmente disconexo* si todo intervalo de extremos $x, y \in A$ (con $x \neq y$) contiene puntos del complemento de A.

unión de 2^2 intervalos cerrados, que son dos subintervalos de I_0 y dos de I_1. Llamaremos I_{00} al subintervalo de I_0 que está a la izquierda, I_{01} al subintervalo de I_0 que está a la derecha, y análogamente definimos I_{10}, I_{11}. En general, C_k es la unión de 2^k intervalos cerrados $I_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}$ con $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ para todo i.

Sea $f : \Omega_2 \longrightarrow C$ definida de la siguiente manera: $f(x)$ es el único punto del conjunto $\cap_{n\geq 1} I_{x_1,\ldots,x_n}$. Probar que f está bien definida y que es un homeomorfismo[3] entre el conjunto de Cantor y Ω_2.

2. **Conjuntos de Cantor II** (Ejercicio 4 de [RA]).

   Construiremos ahora un conjunto $\hat{C}$ con el mismo procedimiento que el conjunto de Cantor (es decir, retirando intervalos centrales en cada etapa), pero ahora en el k-ésimo paso la longitud de los intervalos que se retiren será l_k, donde la sucesión $(l_k)_{k=1}^{\infty}$ cumple que $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} l_i < 1$.

   a) Sea $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} l_i < 1$. Probar que $m_*(\hat{C}^c) = \lambda$.

   b) Mostrar que si $x \in \hat{C}$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \notin \hat{C}$ pero $x_n \to x$ y $x_n \in I_n$, donde I_n es un sub-intervalo en el complemento de $\hat{C}$ con $|I_n| \to 0$.

   c) Probar que en consecuencia, $\hat{C}$ es perfecto y no contiene intervalos abiertos.

   d) Probar que $\hat{C}$ es no numerable.

   e) ([T]) Construir un homeomorfismo $h : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tal que $h(C) = \hat{C}$ y concluir que estos conjuntos son homeomorfos. Sugerencia: Definir primero h en el complemento de C.

3. ([T]) Mostrar que todo espacio métrico compacto, perfecto (i.e. sin puntos aislados) y totalmente disconexo (i.e. todo punto tiene una base de entornos simultaneamente abiertos y cerrados) es homeomorfo a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto. A un espacio topológico perfecto y totalmente disconexo le llamaremos *conjunto de Cantor*.

4. (Ejercicio 10 de [RA]) Construiremos una sucesión decreciente[4] de funciones continuas positivas[5] en $[0,1]$ que converge puntualmente[6], y su límite no es integrable Riemann.

   Sea $\hat{C} \subset [0,1]$ un conjunto de Cantor de medida positiva como se construyó en el ejercicio 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea F_n una función continua tal que: $0 \leq F_n(x) \leq 1$, $F_n(x) = 1$ si $x \in \hat{C}_n$ y F_n vale cero en los puntos medios de los intervalos que forman el complemento de $\hat{C}_n$. Sea $f_n = F_1 \cdot F_2 \cdots F_n$.

   a) Probar que para todo $x \in [0,1]$ se tiene que $0 \leq f_n(x) \leq 1$ y $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, y por lo tanto f_n converge puntualmente a una función f.

   b) Probar que f es discontinua en todo punto de $\hat{C}$. Concluir que f no es integrable Riemann (ver ejercicio 6).

5. **Contenido de Jordan** (Ejercicio 14 de [RA]).

   El objetivo de este ejericio es observar que los cubrimientos finitos no son suficientes para definir la medida exterior. Se define el contenido exterior de Jordan de un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ como

$$J_*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{N} |I_j| : E \subset \cup_{j=1}^{N} I_j, I_j \text{ intervalos y } N \in \mathbb{N} \right\}.$$

   a) Probar que $J_*(E) = J_*(\bar{E})$, para todo $E \subset \mathbb{R}$

   b) Construir un conjunto numerable $E \subset [0,1]$ tal que $J_*(E) = 1$ y $m_*(E) = 0$

[3] Función continua, sobreyectiva y de inversa continua.
[4] Es decir, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in [0,1]$.
[5] Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es *positiva* si $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$.
[6] Una sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ converge puntualmente a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ si $\lim_n f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [0,1]$.

6. **Funciones integrables de Riemann** (Problema 4 de [RA]).

   El objetivo de este ejercicio es probar lo siguiente: *Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ acotada es integrable Riemann si y sólo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida nula.*[7]

   Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ acotada. Definimos $M(x,r) = \sup\{|f(y) - f(z)| : y, z \in B(x,r)\}$ y $M(x) = \lim_{r\to 0} M(x,r)$. Probar que:

   a) La función f es continua en x si y sólo si $M(x) = 0$.

   b) Para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $A_\varepsilon = \{x : M(x) \geq \varepsilon\}$ es compacto.

   c) Si el conjunto de discontinuidades de f tiene medida nula, entonces f es integrable Riemann.
   Sugerencia: Dado $\varepsilon > 0$, se puede cubrir A_ε con una unión finita de intervalos abiertos de medida $\leq \varepsilon$. Usar esto para elegir una partición adecuada de $[0,1]$ que permita estimar la sumas superiores e inferiores.

   d) Si f es integrable Riemann, probar que el conjunto de sus discontinuidades tiene medida nula.
   Sugerencia: El conjunto de discontinuidades de f está contenido en $\cup_n A_{1/n}$. Tomar una partición P de $[0,1]$ tal que la diferencia entre sumas superiores e inferiores sea $\leq \varepsilon/n$ y mostrar que el conjunto de intervalos de P cuyo interior intersecta a $A_{1/n}$ tiene largo total $\leq \varepsilon$.

   e) Extra: Dar un ejemplo de una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que sea integrable Riemann y tal que el conjunto de sus puntos de discontinuidad tenga contenido de Jordan no nulo.

7. **Conjunto de Vitali**.[8]

   En $\mathbb{R}$ consideramos la relación de equivalencia $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Las clases de equivalencia de los reales, definidas por $[x] = \{y \in \mathbb{R} : x \sim y\}$ para $x \in \mathbb{R}$ forman una partición de $\mathbb{R}$. Usando el axioma de elección se puede tomar un conjunto $\mathsf{V} \subseteq [0,1]$ que contenga exactamente un miembro representativo de cada clase de equivalencia; esto es, que para cada real x, el conjunto $\mathsf{V} \cap [x]$ sea un conjunto unitario. Llamamos a V conjunto de Vitali (observar que hay infinitas posibilidades para V).

   a) Consideremos $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ y sea $\mathsf{V}_k = \mathsf{V} + r_k$.
      i) Pruebe que $\mathsf{V}_k \cap \mathsf{V}_{k'} = \emptyset$ si $k \neq k'$.
      ii) Demostrar que $[0,1] \subset \cup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{V}_k \subset [-1,2]$ y concluir que V no es medible Lebesgue.

   b) i) Dado $\epsilon > 0$ modificar la construcción del conjunto de Vitali para que tenga medida exterior menor o igual a ϵ.
      ii) ¿Es posible pedir $\epsilon = 0$?
      iii) Construir un conjunto no medible Lebesgue contenido en un Cantor (como en el ejercicio 2). ¿Puede ser cualquier Cantor?

El ejercicio siguiente fue dejado como ejercicio en la clase de teórico:

8. Probar que la medida de exterior de un rectángulo $R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ es su volumen $(b_1 - a_1) \times \ldots \times (b_n - a_n)$.

---

[7] Un conjunto $A \subset [0,1]$ tiene *medida nula* si su medida exterior $m_*(A)$ es cero.

[8] Este ejercicio presupone conocimientos sobre la *medida de Lebesgue* en $\mathbb{R}$ y sus propiedades. Sin embargo, es autocontenido si uno asume lo siguiente: Si un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es medible Lebesgue entonces tiene una *medida de Lebesgue* asociada $m(E)$ tal que $0 \leq m(E) \leq \infty$. Si E y F son medibles Lebesgue y $E \subset F$ entonces $m(E) \leq m(F)$. Además, si $E_1, E_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de conjuntos medibles Lebesgue entonces $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ es medible Lebesgue y, si estos conjuntos son disjuntos dos a dos, entonces $m(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) = \sum_{n=1}^\infty m(E_n)$. Por último, todo intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es medible Lebesgue y $m([a,b]) = b - a$.