Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Medida e Integración–Curso 2021

PRÁCTICO 2: MEDIDA DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}^d$

Varios de los ejercicios están tomados del libro [RA]: "Real Analysis"de Stein y Shakarchi. Se sugiere consultarlo, dado que el libro contiene sugerencias y ejercicios relacionados que pueden ser de ayuda. Otros ejercicios tienen pre-requisitos de Topología, se indican con una [T].

1. (Ejercicio 5 de [RA]) Dado un conjunto E en $\mathbb{R}^d$, definimos $\mathcal{O}_n$ mediante
$$\mathcal{O}_n = \{x\colon d(x,E) < 1/n\}.$$
   (a) Probar que si E es compacto entonces $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(\mathcal{O}_n)$.
   (b) Dar contraejemplos a lo anterior cuando E es cerrado y no acotado, y cuando es abierto y acotado.

2. (Propiedades de invarianza de la medida de Lebesgue.)
   Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ medible. Para cada $h \in \mathbb{R}^d$ definimos $E_h = E + h = \{x + h\colon x \in E\}$ el *conjunto trasladado de E por h* y para cada $\delta > 0$ definimos $\delta E = \{\delta x\colon x \in E\}$ el *conjunto dilatado de E un factor δ.*
   a) Demostrar que E_h y δE son conjuntos medibles y que:
      (i) $m(E_h) = m(E)$.
      (ii) $m(\delta E) = \delta^d m(E)$.
      (iii) Si B es una bola de radio r en $\mathbb{R}^d$, entonces $m(B) = r^d m(B_1)$, donde B_1 es la bola de centro en el origen y radio unitario (Ejercicio 6 de [RA]).
   b) Probar también que $-E = \{-x\colon x \in E\}$ es medible y que $m(-E) = m(E)$.

   Observación: Ver página 22 de [RA].

3. (Ejercicio 7 de [RA]) Si $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d)$ es un vector de coordenadas positivas (es decir, $\delta_i > 0$ para cada $1 \le i \le d$) definimos
$$\delta E = \{(\delta_1 x_1, \ldots, \delta_d x_d)\colon (x_1, \ldots, x_d) \in E\}.$$
   Probar que $m(\delta E) = \delta_1 \cdots \delta_d m(E)$.

4. (Ejercicio 8 de [RA]) Sea $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ transformación lineal. Demostrar, usando el procedimiento que se indica a continuación, que si $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible entonces $L(E)$ también lo es:
   (a) Notar que si E es compacto también lo es $L(E)$. Luego si E es un conjunto F_σ[1] también lo es $L(E)$.
   (b) Como L verifica que
$$|L(x) - L(y)| \le M|x - y|,$$
   para algún $M > 0$, podemos ver que la imagen por L de un cubo de lado ℓ esta contenida en un cubo de lado $c_d M\ell$, con $c_d = 2\sqrt{d}$. De allí, si $m(E) = 0$ entonces $m(L(E)) = 0$. Finalmente, aplicar el Corolario 3.5 de [RA].

5. (Ejercicio 9 de [RA]) Construir un conjunto abierto $U \subset [0,1]$ tal que $m(\partial\overline{U}) > 0$. Construir un ejemplo análogo en el plano.

[1] Un conjunto es un F_σ si es unión numerable de conjuntos cerrados.

6. (Corolario 3.3 en [RA]) Si $E_1, E_2, \ldots$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ decimos que $E_k \nearrow E$ si $E_k \subset E_{k+1}$ para todo k y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Decimos que $E_k \searrow E$ si $E_{k+1} \subset E_k$ para todo k y $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$.

   Supongamos que $E_1, E_2, \ldots$ es una sucesión de conjuntos medibles. Probar que:

   a) Si $E_k \nearrow E$ entonces E es medible y $m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$.

   b) Si $E_k \searrow E$ y $m(E_{k_0}) < \infty$ para algún $k_0 > 0$ entonces E es medible y $m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$.

   c) En la parte anterior la hipótesis $m(E_{k_0}) < \infty$ para algún $k_0 > 0$ es necesaria. Es decir, dar un ejemplo de $E_k \searrow E$ con $m(E_k) = \infty$ para todo k y tal que $m(E) \neq \infty$.

   Sugerencia: Para la parte a) escribir E como la unión numerable de los conjuntos $F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 \backslash E_1$, $\ldots$, $F_k = E_{k+1} \setminus E_k$, $\ldots$ y luego usar la propiedad de aditividad numerable. Para la parte b) escribir E_{k_0} como la unión numerable de E y los conjuntos $G_k = E_k \setminus E_{k+1}$ para $k \geq k_0$.

7. **Lema de Borel-Cantelli** (Ejercicio 16 de [RA])

   Sea $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una familia numerable de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^d$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. Sea

   $$E = \limsup_{k\to\infty}(E_k) = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k\geq n} E_k = \{x \in \mathbb{R}^d : x \in E_k \text{ para infinitos } k\}.$$

   Probar que E es medible y que $m(E) = 0$.

8. Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible tal que $m(E) > 0$. Probar que para todo $0 < \alpha < 1$ existe un intervalo abierto I tal que

   $$m(E \cap I) \geq \alpha m(I).$$

   Sugerencia: Considerar un abierto $\mathcal{O}$ que contenga a E y tal que $m(E) > \alpha m(\mathcal{O})$. Escribir $\mathcal{O}$ como la unión numerable de intervalos abiertos disjuntos y probar que alguno de estos intervalos cumple la propiedad deseada.

9. *a*) Sea $F \subset (a, b)$ un conjunto medible tal que $F \cap (F + t) = \emptyset$. Mostrar que $2m(F) \leq (b - a) + |t|$.

   b) Deducir que si $F \subset (a, b)$ cumple que $m(F) > \frac{b-a}{2}$ entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo t con $|t| < \delta$ se cumple que $F \cap (F + t) \neq \emptyset$.

   c) Demostrar que si $E \subset \mathbb{R}$ es medible y tiene medida positiva, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (-\delta, \delta)$ vale que $E \cap (E + t) \neq \emptyset$.

   d) Probar que lo anterior no es cierto en general para todo $E \subset \mathbb{R}$ de medida exterior positiva. Sugerencia: Ejercicio 7 del Práctico 1.

10. Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible tal que $m(E) > 0$. Mostrar que el conjunto diferencia $D = \{x - y \;:\; x, y \in E\}$ contiene un intervalo alrededor del origen.