Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Medida e Integración–Curso 2021

Práctico 3: Funciones medibles

1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funciones medibles. Probar que las funciones $1/f$, $\sqrt{f}$ y $\max\{f, g\}$ son también medibles. (Recordar que $\max\{f, g\}$ es la función tal que $\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$).

2. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles de $[0, 1]$ a $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tales que $|f_n(x)| < \infty$ para casi todo x. Mostrar que existe una sucesión $\{c_n\}$ de reales positivos tales que

$$\frac{f_n(x)}{c_n} \to 0 \quad \text{c.t.p. } x$$

   Sugerencia: Considerar c_n tal que $m(\{x : |f_n(x)/c_n| > 1/n\}) < 2^{-n}$. Luego usar el lema de Borel-Cantelli (Ejercicio 7 del práctico anterior).

3. Probar lo siguiente: *Toda función medible* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es el límite c.t.p. de una sucesión de funciones continuas.*

4. Sea $\chi_{[0,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función característica de $[0, 1]$. Probar que no existe una función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ para casi todo x.

5. El objetivo de este ejercicio es construir una función medible $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: Si $g = f$ c.t.p. entonces g es discontinua en todo punto de $[0, 1]$.

   a) Probar que $f = \chi_E$ tiene la propiedad deseada si $E \subset [0, 1]$ es un conjunto medible que verifica que $m(E \cap I) > 0$ y $m(E^c \cap I) > 0$ para todo intervalo $I \subset [0, 1]$.

   b) Probar que existe $E \subset [0, 1]$ como en la parte anterior.
   Sugerencia: Considerar $C_1 \subset [0, 1]$ un conjunto de Cantor de medida positiva como en el Ejercicio 2 del Práctico 2. Considerar luego en cada componente conexa (intervalo) de $[0, 1] \setminus C_1$ otro Cantor de medida positiva construido de forma adecuada. Unir estos (numerables) conjuntos de Cantor con C_1 para obtener un nuevo Cantor C_2. Repetir lo anterior inductivamente y definir $E := \bigcup_n C_n$.