

PRÁCTICO 4: INTEGRACIÓN EN \mathbb{R}^d

- a) Demostrar que $\int_1^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx$ está correctamente definida como integral impropia de Riemann, pero que en este caso no se verifica la definición de integrabilidad de Lebesgue (es decir, no se verifica que $\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\text{sen}(x)}{x} \chi_{[1,\infty)}(x) \right| < \infty$).
 - b) Dar un ejemplo de función integrable Lebesgue que no sea integrable Riemann.
 - c) ¿Existe un ejemplo de f integrable Lebesgue tal que para toda $g = f$ c.t.p. se cumpla que g no es integrable Riemann? Pista: La respuesta podría encontrarse en un práctico anterior...
- (Ejercicio 6 cap. 2 [RA]). La integrabilidad (Lebesgue) de f en \mathbb{R} no implica la convergencia de $f(x)$ a cero cuando $x \rightarrow \infty$.

- a) Dar un ejemplo de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, positiva e integrable tal que $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
Sugerencia: Construir una versión continua de la función que vale n en cada intervalo $[n, n + \frac{1}{n^3})$, $n \geq 1$, y que vale 0 en el resto.
- b) Sin embargo, probar que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua e integrable entonces se verifica que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

- a) Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ integrable para cierto $E \subset \mathbb{R}$ medible (es decir, f es medible y $\int_E |f| < \infty$). Probar que si $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ es medible acotada entonces la función producto $fg : E \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable (es decir, $\int_E |fg| < \infty$).
 - b) Dar un ejemplo de $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ integrables tales que $fg : E \rightarrow \mathbb{R}$ no sea integrable.

- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable probar que $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ es uniformemente continua.
Sugerencia: Usar Proposición 1.12 parte (ii) del cap. 2 de [RA].

5. **Desigualdad de Chebishev.** (Ejercicio 9, Cap. 2 [RA])

- a) Sea $f \geq 0$ integrable. Si $\alpha > 0$ y $E_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$, probar que

$$m(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int f.$$

- b) (Aplicación probabilística). Consideremos el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{L}, P)$ donde P denota la medida de Lebesgue y \mathcal{L} la sigma-álgebra de Lebesgue en $[0, 1]$. Sea $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una variable aleatoria (i.e. una función medible). Se define su valor esperado como

$$EX = \int_{[0,1]} X.$$

Supongamos que $EX < \infty$. Encontrar un intervalo acotado I tal que la probabilidad de que X pertenezca a él sea al menos 0,9. Es decir, tal que $P(\{\omega \in [0, 1]; X(\omega) \in I\}) \geq 0,9$.

- (Ejercicio 10, cap. 2 [RA]). Supongamos $f \geq 0$ y sean $E_{2^k} = \{x : f(x) > 2^k\}$ y $F_{2^k} = \{x : 2^k < f(x) \leq 2^{k+1}\}$. Si f es finita c.t.p., demostrar que $\cup_{k=-\infty}^\infty F_{2^k} = \{f(x) > 0\}$ y que los F_{2^k} son disjuntos. Probar que f es integrable si y sólo si

$$\sum_{k=-\infty}^\infty 2^k m(F_{2^k}) < \infty,$$

si y sólo si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(E_{2^k}) < \infty.$$

Usar este resultado para verificar que $f(x) = |x|^{-a} \chi_{\{|x| \leq 1\}}$ es integrable en \mathbb{R}^d si y sólo si $a < d$, y que $f(x) = |x|^{-b} \chi_{\{|x| > 1\}}$ es integrable si y sólo si $b > d$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ integrable tal que $\int_E f \geq 0$ para todo $E \subset \mathbb{R}^d$ medible. Probar que $f \geq 0$ c.t.p. Si $\int_E f = 0$ para todo $E \subset \mathbb{R}^d$ medible probar que $f = 0$ c.t.p.
8. El objetivo de este ejercicio es construir una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable con la siguiente propiedad: Si $G = F$ c.t.p. entonces G es no acotada en cualquier subintervalo de \mathbb{R} .

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^{-1/2} \chi_{(0,1)}$, y sea $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de los racionales. Definimos

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - q_n).$$

Notar que $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ podría tomar el valor ∞ en algunos puntos. Sin embargo, probar que F es integrable y por lo tanto que la serie que define a F converge para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Probar además que F tiene la propiedad buscada.

Sugerencia: Notar que $f_k(x) := \sum_{n=1}^{n=k} 2^{-n} f(x - q_n)$ define una sucesión creciente f_k de funciones medibles que converge puntualmente a F .

9. **Lema de Fatou revisitado.** En el teórico mostramos que si $f_n \geq 0$ y $f_n \rightarrow f$ c.t.p. entonces $\int f \leq \liminf \int f_n$.

a) Dar un ejemplo de lo anterior tal que $\int f < \liminf \int f_n$.

b) Mostrar que en general, si f_n es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces

$$\int (\liminf f_n) \leq \liminf \int f_n.$$

Dar un ejemplo tal que $\int (\limsup f_n) > \liminf \int f_n$. ¿Puede existir un ejemplo tal que $\int (\limsup f_n) > \limsup \int f_n$?

10. **Convergencia de Vitali.** Decimos que una familia de funciones \mathcal{F} con dominio en $E \subset \mathbb{R}^d$ medible de medida finita es *uniformemente integrable* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma tal que si $F \subset E$ cumple que $m(F) < \delta$ y $f \in \mathcal{F}$ entonces

$$\int_F |f| < \varepsilon.$$

Demostrar que si una sucesión de funciones $\{f_n\}_n$ es uniformemente integrable y $f_n \rightarrow f$ c.t.p. entonces f es integrable y $\int_E |f_n - f| \rightarrow 0$.