Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Medida e Integración–Curso 2021

Práctico 5: Convergencia y Teorema de Fubini

1. **Convergencia en medida.** Decimos que una sucesión de funciones medibles f_n *converge en medida a* f si para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0 \quad , \quad n \to \infty.$$

   a) Mostrar que convergencia en L^1 implica convergencia en medida[1].
   b) Dar un ejemplo de f_n que converge en medida pero no converge en L^1.
   c) Dar un ejemplo de f_n que converge ctp pero no converge en medida.
   d) Dar un ejemplo de f_n que converge ctp pero no converge en L^1.
   e) Dar un ejemplo de f_n que converge en medida pero no converge ctp.
   f) Mostrar que si f_n converge en medida entonce existe una subsuceción de f_n que converge ctp.
   g) Mostrar que si en vez de $\mathbb{R}^d$ se considera como dominio $[0,1]^d$ entonces convergencia ctp implica convergencia en medida.

2. **Lema de Scheffé.** Sean $f_n \geq 0$ y $f \geq 0$ tales que $\int f_n = \int f = 1$ para todo n y tal que $f_n \to f$ ctp. Mostrar que $\lim_n \int |f_n - f| = 0$.

3. (Ejercicio 4 cap. 2 [RA]). Sea $f : (0, b] \to \mathbb{R}$ integrable para cierto $b > 0$. Se define

$$g(x) = \int_x^b (f(t)/t)dt \qquad \text{para } 0 < x \leq b.$$

   Notar que $g : (0, b] \to \mathbb{R}$ está bien definida por lo visto en el Ejercicio 3 del práctico anterior. Probar que g es integrable y que

$$\int_{(0,b]} g = \int_{(0,b]} f.$$

4. (Ejercicio 16 cap. 2 [RA]). Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrable y $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d) \in \mathbb{R}^d$ tal que $\delta_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq d$. Se define

$$f^\delta(x) := f(\delta x) = f(\delta_1 x_1, \ldots, \delta_d x_d).$$

   Probar que f^δ es integrable y que

$$\int f^\delta = |\delta_1|^{-1} \ldots |\delta_d|^{-1} \int f.$$

[1] Recordar que f_n converge a f en L^1 si $\lim_n \int |f - f_n| = 0$.

5. (Problema 4 cap. 2 [RA]). Sea $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ transformación lineal. Recordar que en el Ejercicio 4 del Práctico 2 se probó que si $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible entonces $L(E)$ también lo es. El objetivo de este ejercicio es probar que además se cumple que

$$m(L(E)) = |\det(L)| m(E).$$

En particular, la medida de Lebesgue es invariante por isometrías de $\mathbb{R}^d$ (¿por qué?).

a) Para $d = 2$, probar (usando el teorema de Fubini) que $m(L(E)) = |\det(L)| m(E)$ se cumple para toda L dada por una matriz de tipo $L = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

b) Para d cualquiera, extender lo anterior (usando Fubini iteradamente) para toda L dada por una matriz triangular superior con entradas 1 en la diagonal (es decir, la matriz asociada $(a_{ij})_{ij}$ a L cumple que $a_{ii} = 1$ para todo $1 \leq i \leq d$ y $a_{ij} = 0$ si $i > j$).

c) Mostrar lo mismo para matrices triangulares inferiores con entradas 1 en la diagonal.

d) Tomar nota que si $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es una transformación lineal entonces se descompone como $D_i D D_s$ donde D_i es triangular inferior con 1's en la diagonal, D es una matriz diagonal y D_s es triangular superior con 1's en la diagonal. Esto se conoce como descomposición LDU de L. En internet pueden encontrarse pruebas de este interesante resultado de álgebra lineal que asumiremos.

e) Concluir que $m(L(E)) = |\det(L)| m(E)$ para toda $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ lineal y $E \subset \mathbb{R}^d$ medible.

6. Usar el ejercicio anterior para mostrar que si f es una función integrable en $\mathbb{R}^d$ y L es una transformación lineal invertible de $\mathbb{R}^d$, entonces $f \circ L$ es integrable y se cumple que:

$$\int f \circ L = |\det(L)|^{-1} \int f.$$

7. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible y no negativa. Se define el conjunto

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Demostrar que F es medible y que $m(F) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx$.

El siguiente ejercicio fue dejado como ejercicio en el teórico:

8. Sean $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ y $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$. Probar que:

$$m_*(E_1 \times E_2) \leq m_*(E_1) m_*(E_2).$$

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - 2^{-n} & \text{si } (x,y) \in (n, n+1)^2 \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}_{>0}, \\ 2^{-n} - 2 & \text{si } (x,y) \in (n, n+1) \times (n+1, n+2) \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}_{>0}, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

   a) Mostrar que para todo $y \in \mathbb{R}$ se cumple que la función $x \mapsto f(x,y)$ es integrable y calcular $F(y) = \int f(x,y)dm(x)$.

   b) Mostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que la función $y \mapsto f(x,y)$ es integrable y calcular $G(x) = \int f(x,y)dm(y)$.

   c) Mostrar que las funciones F y G son integrables pero que $\int F \neq \int G$.

   d) Explicar por qué no aplica el Teorema de Fubini.

10. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función medible tal que la función $g(x,y) : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = |f(x) - f(y)|$ es integrable. Probar que entonces f es integrable.

11. **Funciones convexas.** Una función $f : I \to \mathbb{R}$ (con $I \subset \mathbb{R}$ conexo) es *convexa* si para todo $x, y \in I$ y $0 \leq t \leq 1$ se cumple que $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

   a) Buscar una interpretación geométrica de que una función sea convexa.

   b) Mostrar que la función $|x|^p$ con $p \geq 1$ es convexa en $\mathbb{R}$, $-\log x$ es convexa en $(0, +\infty)$ y la función $x \log x$ en $[0, \infty)$ (donde consideramos $0 \log 0 = 0$).

   c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa. Mostrar que para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ existe (al menos) una función lineal $g(x) = ax + b$ de forma tal que $g(x_0) = f(x_0)$ y tal que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   d) Probar que si $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa y tiene un mínimo local en x_0 entonces es un mínimo global.

   e) **Desigualdad de Jensen.** Si $\varphi : [0,1] \to I$ es integrable, entonces se cumple que $f\left(\int_{[0,1]} \varphi(t)dt\right) \leq \int_{[0,1]} f \circ \varphi(t)dt$. (Sugerencia: Considerar g función lineal tal que $g(\int_{[0,1]} \varphi) = f(\int_{[0,1]} \varphi)$ y tal que $g \leq f$ y usar que las funciones lineales entran y salen libremente de las integrales.)

   f) **Rigidez.** Estudiar en qué condiciones puede ocurrir la igualdad en la desigualdad de Jensen.