Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Medida e Integración–Curso 2021

Práctico 6: Diferenciación y Densidad en $\mathbb{R}^d$

1. (Ejercicio 3 cap. 3 [RA]). Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible tal que 0 es un punto de densidad de Lebesgue para E.

   a) Probar que existe una sucesión $(x_n)_n$ en E tal que $x_n \neq 0$ para todo n, $x_n \xrightarrow{n} 0$ y $-x_n \in E$ para todo n.

   b) Probar que existe una sucesión $(x_n)_n$ en E tal que $x_n \neq 0$ para todo n, $x_n \xrightarrow{n} 0$ y $2x_n \in E$ para todo n.

   c) Generalizar estas propiedades.

2. (Función maximal de Hardy-Littlewood - Ejercicio 4 cap. 3 [RA]). Recordar que si f es integrable en $\mathbb{R}^d$ se define su *función maximal* f^* como

$$f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

   donde el supremo es considerado sobre todas las bolas B que contienen al punto x.

   Probar que si f es integrable en $\mathbb{R}^d$ y no es igual a 0 ctp entonces

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|^d}, \qquad \text{para algún } c > 0 \text{ y para todo } |x| \geq 1.$$

   Concluir que f^* no es integrable en $\mathbb{R}^d$. Luego mostrar que el 'estimativo de tipo débil'

$$m(\{x\colon f^*(x) > \alpha\}) \leq c/\alpha$$

   para todo $\alpha > 0$ si $\int |f| = 1$ es el mejor estimativo posible en el siguiente sentido: si f tiene soporte en la bola unidad (es decir que vale 0 ctp fuera) y $\int |f| = 1$ entonces

$$m(\{x\colon f^*(x) > \alpha\}) \geq \frac{c'}{\alpha}$$

   para algún $c' > 0$ y todo $\alpha > 0$ suficientemente pequeño.

   (Sugerencia: Para la primera parte usar el hecho que $\int_B |f| > 0$ para alguna bola B).

3. (Ejercicio 7 cap. 3 [RA]). Sea $E \subset [0,1]$ medible tal que para cierto $\alpha > 0$ se cumple que $m(E \cap I) \geq \alpha m(I)$ para todo intervalo $I \subset [0,1]$. Probar que entonces $m(E) = 1$.

4. Sea $A \subset \mathbb{R}$ medible tal que $m(A) > 0$. ¿Puede existir una sucesión de reales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que el complemento de $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A + s_n)$ en $\mathbb{R}$ tenga medida cero?

   (Sugerencia: Para cada $\epsilon > 0$ encontrar un intervalo I_ϵ de largo l_ϵ tal que $m(A \cap I_\epsilon) > (1 - \epsilon)m(I_\epsilon)$. Considerar $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}(A + t_k)$ con $t_k = kl_\epsilon$. Luego variar ϵ.)

5. (Pág 108 [RA]). Decimos que una familia $\{U_\alpha\}_\alpha$ de mebibles de $\mathbb{R}^d$ *decrece regularmente* a un punto $\bar{x}$ (o que tiene *excentricidad acotada* en $\bar{x}$) si existe una constante $c > 0$ tal que para todo U_α existe una bola B con

$$\bar{x} \in B, \qquad U_\alpha \subset B \quad \text{y} \quad m(U_\alpha) \geq cm(B).$$

   Es decir, U_α está contenido en B pero su medida es *comparable* con la medida de B. Por ejemplo, la familia de todos los cubos que contienen $\bar{x}$ decrece regularmente a $\bar{x}$. Sin embargo, este no es el caso para la familia de todos los rectángulos que contienen a $\bar{x}$ (¿por qué?).

   El objetivo de este ejercicio es probar que el teorema de diferenciación de Lebesgue continua siendo válido si en lugar de bolas se consideran familias que decrecen regularmente. Es decir, se pide probar lo siguiente:

   > *Sea f localmente integrable en $\mathbb{R}^d$. Supongamos que $\{U_\alpha\}_\alpha$ es una familia de mebibles que decrece regularmente a $\bar{x}$, con $\bar{x}$ contenido en el conjunto de Lebesgue de f. Entonces*

$$\lim_{\substack{m(U_\alpha)\to 0\\ x\in U_\alpha}} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(y)\,dy = f(\bar{x}).$$