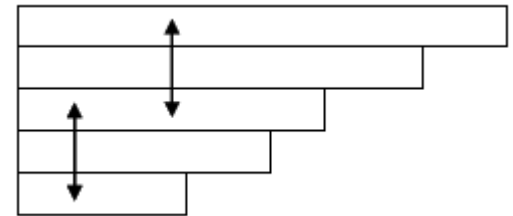
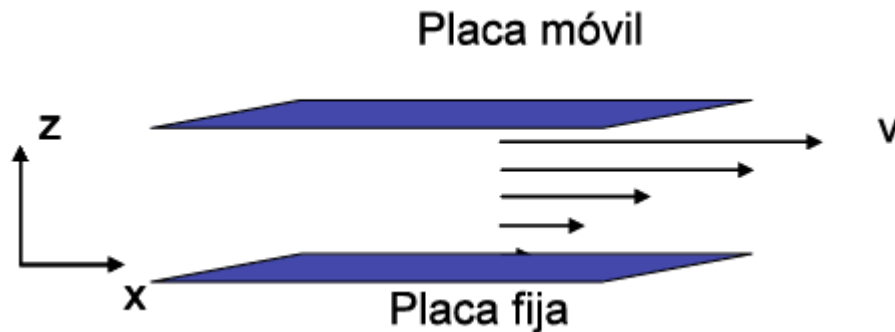


Convección. Viscosidad.

Supongamos un fluido confinado entre dos placas paralelas, una móvil con velocidad v y otra fija. La placa móvil arrastra una capa de fluido, transfiriéndole cierta *cantidad de movimiento* ($p_x = mv_x$). Esto sucede para el resto de las capas adyacentes, ejerciendo *una fuerza de fricción* que opone resistencia a su desplazamiento. Así se establece una graduación de la velocidad de desplazamiento que se anula en la capa de contacto con la placa fija.



Si la velocidad no es demasiado alta el fluido se desplaza en régimen laminar, con una velocidad distinta para cada capa de fluido en función de la distancia a la placa móvil. La fricción interna en el fluido genera la *viscosidad*.

Desde el punto de vista molecular existe un intercambio de partículas entre capas debido al movimiento de las moléculas del fluido en direcciones perpendiculares a la del desplazamiento.

Viscosidad. Ley de Newton

Las moléculas que llegan desde una capa más rápida comunican cantidad de movimiento y aceleran la capa. En cambio, las partículas que proceden de capas más lentas frenan la capa móvil.

Experimentalmente se encuentra que la fuerza de fricción F_x que una capa de fluido ejerce sobre otra es proporcional al área de la superficie de contacto y al gradiente de la velocidad dv_x/dz .

Ley de Newton de la viscosidad

$$F_x = -\eta A \frac{dv_x}{dz}$$

aplicable a fluidos que se

desplazan en régimen laminar. Como la fuerza se puede escribir como cantidad de movimiento transportada por unidad de tiempo (ley de transporte):

$$\frac{1}{A} \frac{dp_x}{dt} = -\eta \frac{dv_x}{dz}$$

El coeficiente de proporcionalidad (η) se denomina **viscosidad** y se mide en unidades de $\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$ en el sistema internacional. En el sistema cegesimal la unidad es $\text{dina}\cdot\text{s}\cdot\text{cm}^{-2}$ o poise (P) con la equivalencia de $1 \text{ P} = 0.1 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$.

Si la **velocidad** a la que se desplaza el fluido es **muy alta** entonces se alcanza el **régimen turbulento**, donde el intercambio de cantidad de movimiento ya no ocurre por movimiento al azar de moléculas sino a mezclas macroscópicas de masa. En este caso no vale la ley de Newton.

Viscosidad. Ley de Newton



Isaac Newton
4 de enero de 1643-
31 de marzo de 1727

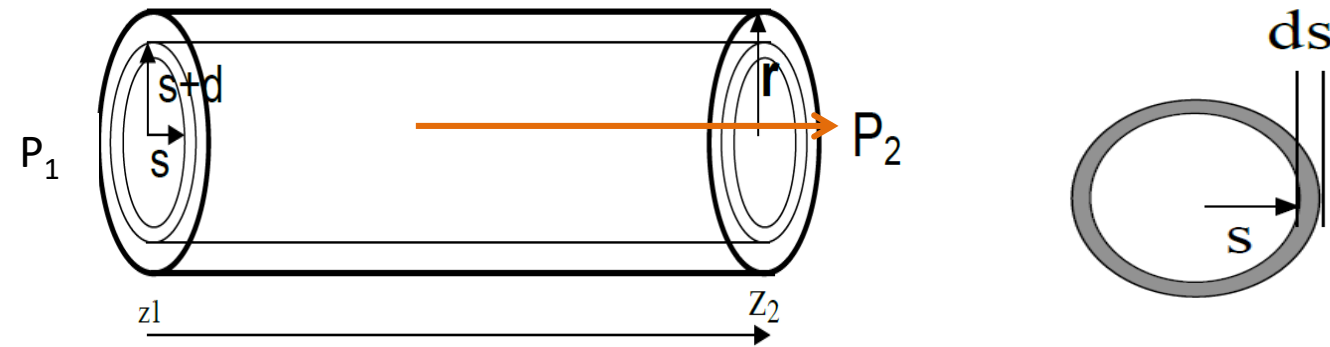
La viscosidad de una sustancia es función de la presión y la temperatura. La viscosidad de gases es menor que la de los líquidos y aumenta con la temperatura, mientras que la dependencia con la presión es poco significativa. En los líquidos la viscosidad disminuye al aumentar la temperatura y al disminuir la presión porque disminuyen las atracciones intermoleculares.

Sustancia	T/°C	η (cp)
N ₂ (g)	27	0.0178
Benceno(l)	20	0.652
H ₂ O(l)	20	1.002
H ₂ O(l)	100	0.282
H ₂ O(g)	100	0.0126
H ₂ O(g)	200	0.0164
Hg(l)	20	1.554

Aquellos fluidos en que la **viscosidad varía con la velocidad** (o con el gradiente de la velocidad) se denominan *fluidos no newtonianos* y no siguen la ley de Newton. Un ejemplo son las dispersiones coloidales en los que la velocidad puede cambiar la forma u orientación de las partículas en suspensión. La sangre presenta una viscosidad menor a velocidades altas que cuando circula a velocidades bajas, debido a que en el primer caso los glóbulos en suspensión se orientan para disminuir el rozamiento con el fluido.

Ley de Newton y Caída de Presión.

Supongamos el caso de un fluido que circula por una conducción cilíndrica de radio r . Tomemos una trozo infinitesimal de dicho conductor de longitud $dz = z_2 - z_1$ a lo largo del cual se produce una caída de presión $dP = P_2 - P_1$. La presión de entrada P_1 es mayor que la de salida P_2 de forma que el fluido circula en el sentido positivo de la coordenada z , de izquierda a derecha. La distancia al centro de la conducción viene dada por la coordenada s .



Dado que la velocidad es función de la distancia al centro de la conducción dada por la coordenada s vamos a considerar una capa concéntrica de fluido situada entre s y $s+ds$. Para obtener la velocidad necesitamos conocer las fuerzas que actúan sobre el sistema.

Las fuerzas que actúan sobre dicha capa de fluido son de dos tipos y el signo será según actúen en el sentido de circulación del fluido $+$ o en contra $-$

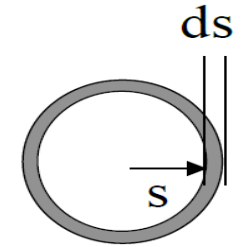
1. Fuerzas hidrostáticas debidas a la presión:

La presión actúa sobre la superficie de la capa concéntrica perpendicular al eje z (la corona circular que aparece en gris en la figura de la derecha).

(Fuerza = Presión * Superficie)

1.1. Debida a la presión de entrada $(2 \pi s ds) P_1 (>0)$

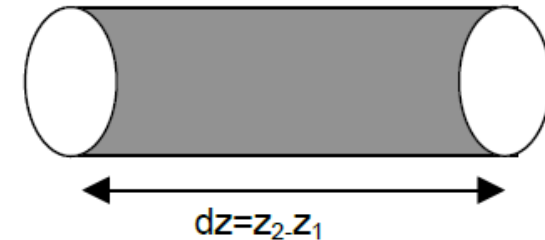
1.2. Debida a la presión de salida $-(2 \pi s ds) P_2 (<0)$



2. Fuerzas debidas al rozamiento entre capas del fluido:

Estas fuerzas, de acuerdo a la ley de Newton, se obtienen como el producto del área de rozamiento entre capas concéntricas (área lateral del cilindro, en gris en la figura), el coeficiente de viscosidad (η) y el gradiente de velocidad (dv/ds)

$$-\eta[2\pi s dz] \left(\frac{dv}{ds} \right)_s$$



2.1. Rozamiento por la parte interior (situada en s) de la capa cilíndrica: $2 \pi s dz$ es el área lateral del cilindro de radio s y altura dz . Como el gradiente de velocidad es negativo (la velocidad disminuye conforme nos acercamos a las paredes) esta fuerza es >0 . El rozamiento por la parte interna acelera la capa de fluido considerada, ya que las capas interiores van más rápido.

Ley de Newton y Caída de Presión.

2.2. Rozamiento por la parte exterior (situada en $s+ds$) de la capa cilíndrica: $\eta[2\pi(s+ds)dz]\left(\frac{dv}{ds}\right)_{s+ds}$

$2\pi(s+ds)dz$ es el área lateral del cilindro de radio $s+ds$ y altura dz . Esta fuerza es <0 . El rozamiento por la parte externa disminuye la velocidad de la capa de fluido considerada.

Quando sometemos un fluido a una diferencia de presión entre los extremos de una circulación, éste se ve acelerado y comienza a circular cada vez a mayor velocidad. Las fuerzas de rozamiento internas van aumentando con la velocidad del fluido hasta que llega un momento en que estas fuerzas igualan a la resultante hidrostática. En ese momento la suma de fuerzas se anula, alcanzándose el régimen estacionario, y el fluido circula a velocidad constante.

Aplicando la condición de régimen estacionario:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$2\pi s ds P_1 - 2\pi s ds P_2 - \eta[2\pi s dz]\left(\frac{dv}{ds}\right)_s + \eta[2\pi(s+ds)dz]\left(\frac{dv}{ds}\right)_{s+ds} = 0$$

$$-2\pi s ds dP + 2\pi\eta dz \left[(s+ds)\left(\frac{dv}{ds}\right)_{s+ds} - s\left(\frac{dv}{ds}\right)_s \right] = 0$$

Lo que hay dentro del corchete corresponde a la definición de la diferencial de una función, por lo que dividiendo luego por dz y ordenando:

$$-s ds dP + \eta dz d\left[s \frac{dv}{ds}\right] = 0$$

$$\frac{dP}{dz} s ds = \eta d\left[s \frac{dv}{dz}\right]$$

Teniendo en cuenta que el gradiente de presión (dP/dz) no depende de la coordenada s , podemos integrar inmediatamente esta ecuación para conocer la dependencia de la velocidad con la distancia al centro de la conducción (la función $v(s)$):

$$\frac{dP}{dz} \frac{s^2}{2} + C = \eta s \frac{dv}{ds}$$

La constante de integración C la podemos determinar sabiendo que dv/ds no puede ser nunca infinito, con lo que en $s=0$, tendremos $0+C=0$; $C=0$.

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2\eta} \frac{dP}{dz} s \longrightarrow dv = \frac{1}{2\eta} \frac{dP}{dz} s ds$$

Integrando de nuevo, nos queda:

$$v(s) = \frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dz} s^2 + C'$$

La nueva constante de integración queda determinada sabiendo que cuando $s=r$ (en las paredes de la conducción) la velocidad del fluido se anula, $v(s=r)=0$

$$0 = \frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dz} r^2 + C' \Rightarrow C' = -\frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dz} r^2$$

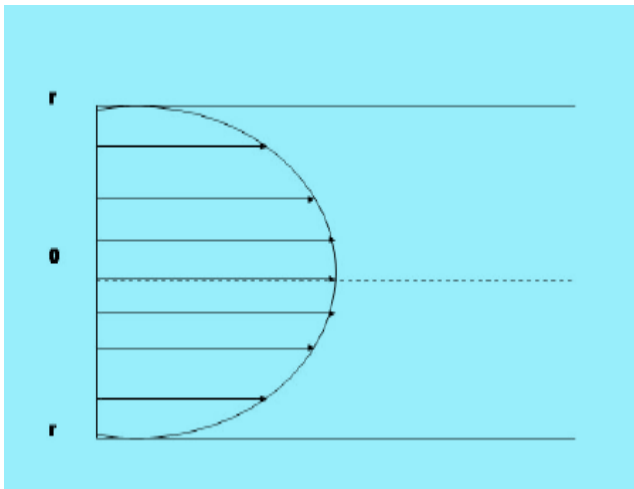
Velocidad en fluido viscoso. Flujo Laminar

Quedando que la velocidad a la que se desplaza el fluido es una función de la distancia al centro de la misma, de la forma:

$$v(s) = -\frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dz} (r^2 - s^2)$$

Es decir, que en régimen estacionario tenemos un perfil parabólico de velocidades, que es máxima en el centro de la conducción ($s=0$) y nula en las paredes de la misma ($s=r$). Este **perfil** se llama **laminar**.

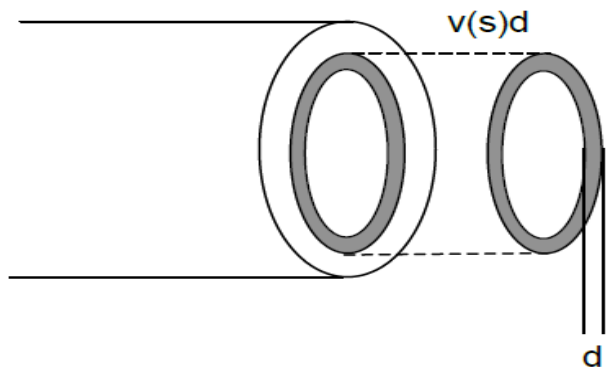
El perfil no es lineal ya que en este caso el área a través de la que se produce el transporte no es constante, sino que aumenta a medida que nos alejamos del centro de la conducción.



Flujo Laminar. Ley de Poiseuille

La viscosidad de un fluido se puede determinar por la *ley de Poiseuille* para la velocidad de flujo. Establece que *la cantidad de volumen (o masa) de fluido que circula por un conductor por unidad de tiempo (caudal o flujo másico) es función de la diferencia de presión aplicada entre los extremos del conductor de fluido*. El coeficiente de viscosidad η de un fluido determina la velocidad a la que circula sometido bajo una diferencia de presión. Esta velocidad determina a su vez el **caudal** de circulación en la conducción.

Tomemos primero la cantidad de fluido que circula por nuestra capa cilíndrica en un tiempo dt . En ese dt , la capa cilíndrica situada entre s y $s+ds$ avanza un total de $v(s)dt$. El volumen de fluido que ha avanzado en ese dt por nuestra capa se obtendrá multiplicando la longitud recorrida ($v(s)dt$) por el área de la corona circular marcada en gris ($2\pi s ds$). Así el **caudal**, volumen por unidad de tiempo, debido a la capa situada entre s y $s+ds$, será $(2\pi s ds)v(s)$.



Jean Léonard Marie Poiseuille
22 de abril de 1797-
26 de diciembre de 1869



Ley de Poiseuille

El caudal total que circula por la conducción lo obtendremos sumando las contribuciones de cada capa, es decir, haciendo la integral desde la capa situada a $s=0$ hasta la situada en $s=r$:

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^r 2\pi s v(s) ds = -\frac{2\pi}{4\eta} \frac{dP}{dz} \int_0^r (r^2 - s^2) ds \quad \text{Con la } v(s) \text{ anterior; } \quad \boxed{v(s) = -\frac{1}{4\eta} \frac{dP}{dz} (r^2 - s^2)}$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = -\frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{dP}{dz}}$$

Ley de Poiseuille diferencial

La ley de Poiseuille diferencial podemos integrarla para considerar una conducción finita (entre un z inicial y final concretos) con una caída de presión también finita. Para el caso de líquidos la integración es inmediata si líquidos son incompresibles ($V \neq V(P)$). Así para régimen estacionario el caudal es constante y no depende de la posición z de donde midamos ($dV/dt = \Delta V / \Delta t \neq f(z)$).

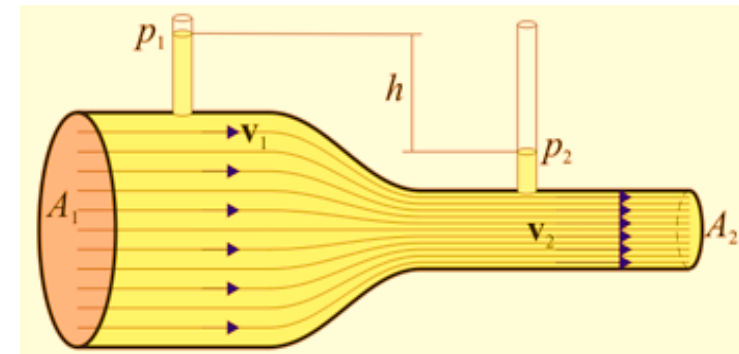
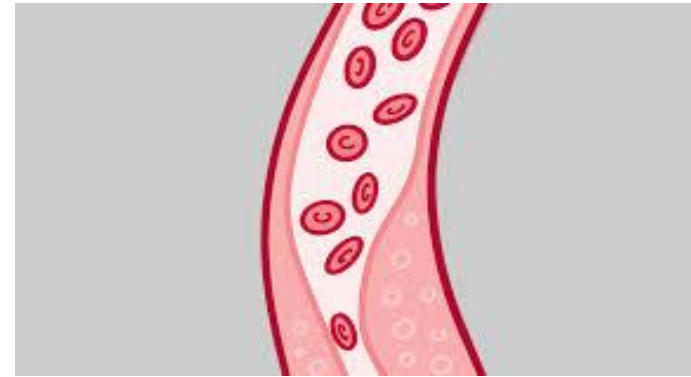
$$\frac{\Delta V}{\Delta t} dz = -\frac{\pi r^4}{8\eta} dP \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} \int_{z_i}^{z_f} dz = -\frac{\pi r^4}{8\eta} \int_{P_i}^{P_f} dP; \quad \boxed{\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{P_f - P_i}{z_f - z_i} = -\frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{\Delta z}}$$

Efecto Venturi

Este **efecto** surge cuando un fluido en movimiento dentro de un conducto cerrado disminuye su presión cuando aumenta la velocidad al pasar por una zona de sección menor. Si el aumento de velocidad es grande, se alcanzan grandes diferencias de presión y, si en ese punto del conducto se introduce el extremo de otro tubo, se produce una aspiración del fluido de ese tubo. Este efecto fue demostrado en 1797 por **Giovanni Venturi**.

Si el caudal de un fluido es constante pero la sección disminuye, necesariamente la velocidad aumenta al atravesar esta sección. Por el teorema de la **conservación de la energía**, si la energía cinética aumenta, la energía potencial gravitatoria provoca una disminución de la presión.

La cantidad de líquido en el vaso puede cambiar por estrangulación (**Tubo de Venturi**)



Ley de Bernouilli

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Ley de conservación de la masa

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Caudal Q

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2gh}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Ley de Poiseuille para gases

Estas consideraciones no son válidas para gases porque el volumen depende la presión. Si introducimos un gas en la tubería y la presión cae a lo largo de ésta se observará un volumen mayor de gas debido a su expansión. El caudal medido en volumen por unidad de tiempo dependerá de la coordenada de avance, pues el gas se va expandiendo.

Podemos evitar el volumen, V , considerando un caudal «másico» (masa por unidad de tiempo). Así si entran m gramos de gas en un tiempo dado, en régimen estacionario saldrán de la conducción m gramos por la misma unidad de tiempo.

Usando la ley de los gases ideales podemos escribir el caudal, dV/dt con M el peso molecular del gas

$$\frac{dV}{dt} = \frac{RT}{PM} \frac{dm}{dt}$$

Sustituyendo esta expresión con la ley diferencial de Poiseuille:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{dP}{dz}$$

$$\frac{RT}{PM} \frac{dm}{dt} = -\frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{dP}{dz}$$

Ahora podemos proceder a integrar, pues el caudal en masa por unidad de tiempo sí es constante ($dm/dt = \Delta m / \Delta t \neq f(z)$):

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} dz = -\frac{\pi r^4 M}{8\eta RT} P dP \Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} \int_{z_i}^{z_f} dz = -\frac{\pi r^4 M}{8\eta RT} \int_{P_i}^{P_f} P dP$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\frac{\pi r^4 M}{16\eta RT} \frac{P_f^2 - P_i^2}{z_f - z_i}$$

Ley de Poiseuille
integrada para los gases ideales

Número de Reynolds

El **número de Reynolds** (Re) es un número adimensionado utilizado en el estudio de fenómenos de transporte para caracterizar el movimiento de un fluido (perfil de velocidad). Su valor indica si el flujo sigue un modelo **laminar** o **turbulento**.

Se define como la relación entre las fuerzas **inerciales** (o **convectivas**) y las fuerzas **viscosas** presentes en un fluido. Éste relaciona la densidad, viscosidad, velocidad y dimensión característica que define su confinamiento en una expresión adimensional. El flujo pueda considerarse **laminar** (número de Reynolds pequeño, menor a **2300** en tuberías) o **turbulento** (número de Reynolds grande, mayor a **4000** a la entrada de tuberías) desordenado, tridimensional y no estacionario.

$$\text{Re}(x,t) = \frac{\mathbf{v}_i(x,t)L}{\nu}$$

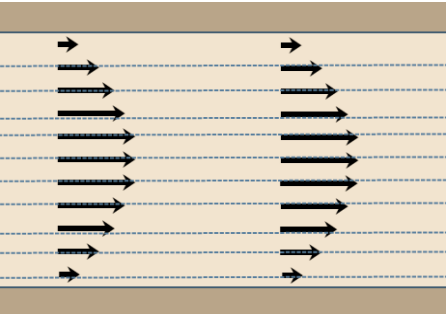
Donde \mathbf{L} es la longitud característica que en una tubería sería el diámetro hidráulico, ν es la viscosidad cinemática ($\nu [\text{m}^2 \text{s}^{-1}] = \mu [\text{Pa} \cdot \text{s}] / \rho [\text{Kg m}^{-3}]$) mientras que en el sistema CGS es el Stokes $[\text{cm}^2 \text{s}^{-1}]$.

$$\text{Re} = \frac{\mathbf{v}_i L}{\nu} = \frac{\mathbf{v}_i L \rho}{\mu}$$

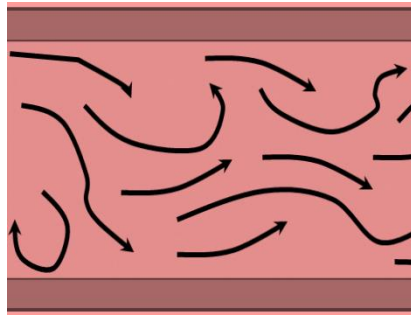
$\mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t)$ es la velocidad característica o límite del fluido i en la posición \mathbf{x} al tiempo t , pero se supone que está en EE o sea que no depende de ambas variables.

Número de Reynolds

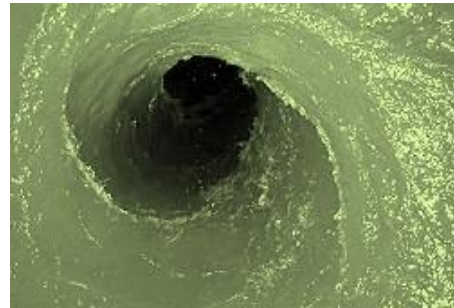
laminar



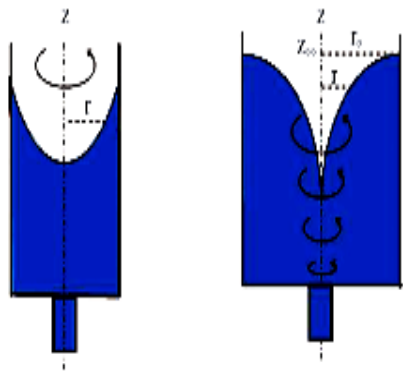
turbulento



vórtices



Osborne Reynolds
23 de agosto de 1842-
21 de febrero de 1912



La *vorticidad* se define como una magnitud que cuantifica la rotación que realiza un fluido. Se determina por el rotor del campo de velocidades vectorial. El operador matemático se conoce como *rotacional*, y es un operador vectorial que expresa la tendencia que un campo vectorial tiene a inducir rotación en torno a un punto. Pueden ser estacionarios como en los agitadores magnéticos o no.

El tema es conocer el perfil de velocidad en función de las distancias a las cuales se mueve el fluido, en geometría plana, cilíndrica, cónica, etc. En estos casos es necesario resolver las ecuaciones de la dinámica de los fluidos para obtener el perfil de velocidad. En ausencia de presiones aplicadas, de variaciones de torsión y de la gravedad, la *Ecuación de Navier Stokes* es en 1-dim;

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{j,x}}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}_{j,x}}{\partial x^2} \right) - \mathbf{v}_{j,x} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{j,x}}{\partial x} \right)$$

Ecuación de NAVIER STOKES

TRANSPORTE DE ELECTROLITOS BAJO DIFUSION CONVECTIVA

La energía transferida de una superficie sólida a un fluido en movimiento se denomina **convección**. La convección es el mecanismo de transferencia de calor o materia por movimiento de masa o circulación dentro de la sustancia, es una combinación de transferencia de energía por movimiento molecular aleatorio (**conducción**) y movimiento volumétrico del fluido (**advección**). Puede ser **natural** producida solo por las diferencias de densidades de la materia; o **forzada**, cuando la materia es obligada a moverse de un lugar a otro, por ejemplo el aire con un ventilador o el agua con una bomba. Se produce en líquidos y gases donde las moléculas son libres de moverse en el medio.

El flujo de una sustancia por difusión y convección en presencia de un exceso de electrolito soporte se encuentra representado por la ecuaciones de difusión y convección puras sumadas vectorialmente

$$\mathbf{J}_{i,dif} = -D_i \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}, \frac{\partial C_i}{\partial y}, \frac{\partial C_i}{\partial z} \right)$$

$$\mathbf{J}_{i,conv} = C_i (\mathbf{v}_{i,x}, \mathbf{v}_{i,y}, \mathbf{v}_{i,z})$$

Vector velocidad de transporte fluidodinámico del ion

En 1-dim se cumple:

$$\mathbf{J}_{i,x} = -D_i \left(\frac{\partial C_i}{\partial x} \right) + C_i \mathbf{v}_{i,x}$$

TRANSPORTE DE ELECTROLITOS POR DIFUSION CONVECTIVA

Proceso dependiente del tiempo: análisis de la variación temporal de la concentración.

$$\frac{dC_j^\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_j^\alpha \left(\frac{\partial C_j^\alpha}{\partial \mathbf{x}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} (C_j^\alpha \mathbf{v}_{j,x})$$

En general el coeficiente de difusión es constante en un medio dado y la velocidad no varia con el espacio ni tiempo porque se consideran procesos uniformes en el recipiente o reactor. Además se consideran no acelerados.

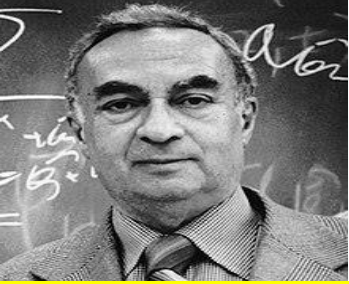
Para determinar el perfil de velocidad en función del espacio y el tiempo se debe aplicar la **Ecuación de Navier Stokes** y luego sustituir en la ecuación a la derecha de transporte de masas.

$$\frac{\partial C_j}{\partial t} = D_j \left(\frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} \right) - \mathbf{v}_{j,x} \left(\frac{\partial C_j}{\partial x} \right)$$

La resolución de esta ecuación es como una 2ª. Ley de Fick y con las condiciones geométricas, iniciales y de contorno obtendremos el perfil de concentración para el proceso difusión-convección.

En el caso particular de estado estacionario: EE

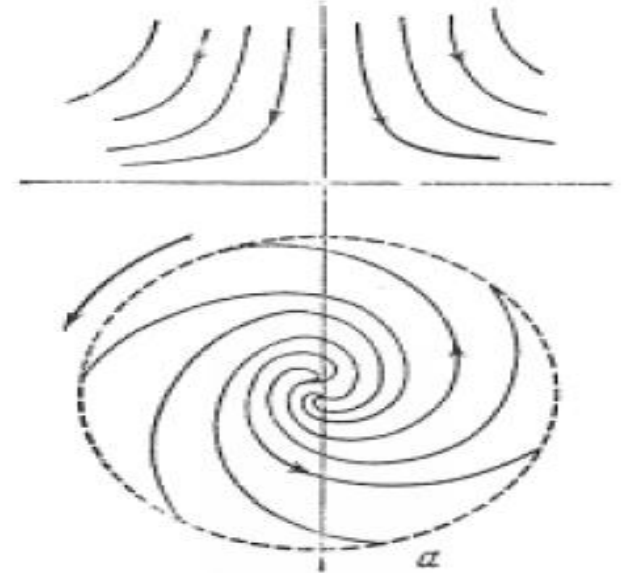
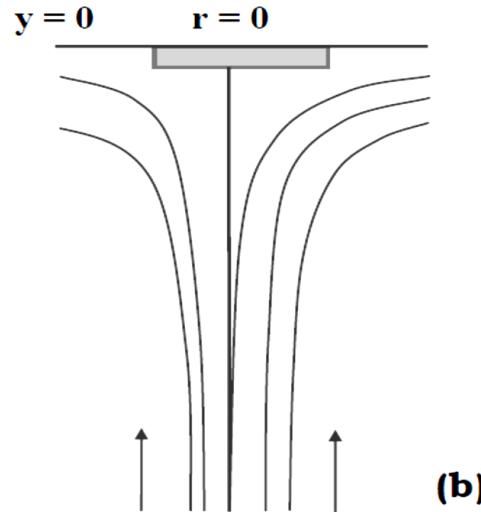
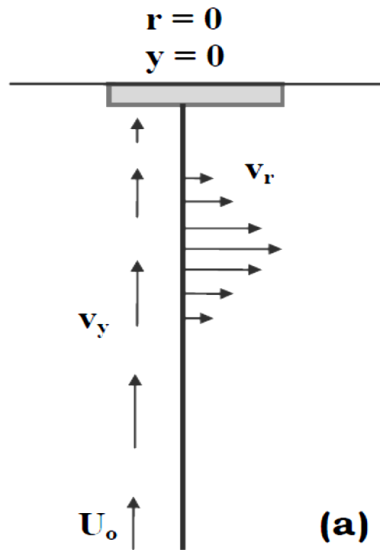
$$\frac{\partial C_j}{\partial t} = k = 0 \quad D_j \left(\frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} \right) = \mathbf{v}_{j,x} \left(\frac{\partial C_j}{\partial x} \right)$$



Ecuación de Levich. Disco rotante

Un sistema de sumo interés práctico es el de **disco rotante** puesto que permite controlar la velocidad de acceso de los reactivos a un electrodo y la salida de los productos.

Veniamin Grigorievich Levich
30 de marzo de 1917
19 de enero de 1987



El sistema de disco rotante a velocidad angular ω tiene simetría cilíndrica. Para un estado estacionario se cumple:

La solución de Serie de Potencias en Navier-Stokes es para cuando la coordenada azimutal, y , es pequeña $\ll (\nu/\omega)^{1/2}$:

$$D_j \left(\frac{\partial^2 C_j}{\partial y^2} \right) = \mathbf{v}_{i,y} \left(\frac{\partial C_j}{\partial y} \right)$$

$$\mathbf{v}_{i,y} \approx -0.51 y^2 \sqrt{\frac{\omega^3}{\nu}}$$



$$D_j \left(\frac{\partial^2 C_j}{\partial y^2} \right) + 0.51 y^2 \sqrt{\frac{\omega^3}{\nu}} \left(\frac{\partial C_j}{\partial y} \right) = 0$$

De la ecuación anterior se obtiene el perfil de concentración y luego lo podemos vincular a una magnitud medible como la densidad de corriente, $j(y)$:

$$j(y) = nFD_j \left(\frac{\partial C_j}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{0 sea que debemos tomar la primera derivada en la superficie, } y = 0; \quad \left(\frac{\partial C_j}{\partial y} \right)_{y=0} = 0.62 D_j^{1/3} \nu^{-1/6} \omega^{1/2} (C_j^o - C_{j,y=0})$$

$$j = 0.62 n F D_j^{2/3} \nu^{-1/6} \omega^{1/2} (C_j^o - C_{j,y=0})$$

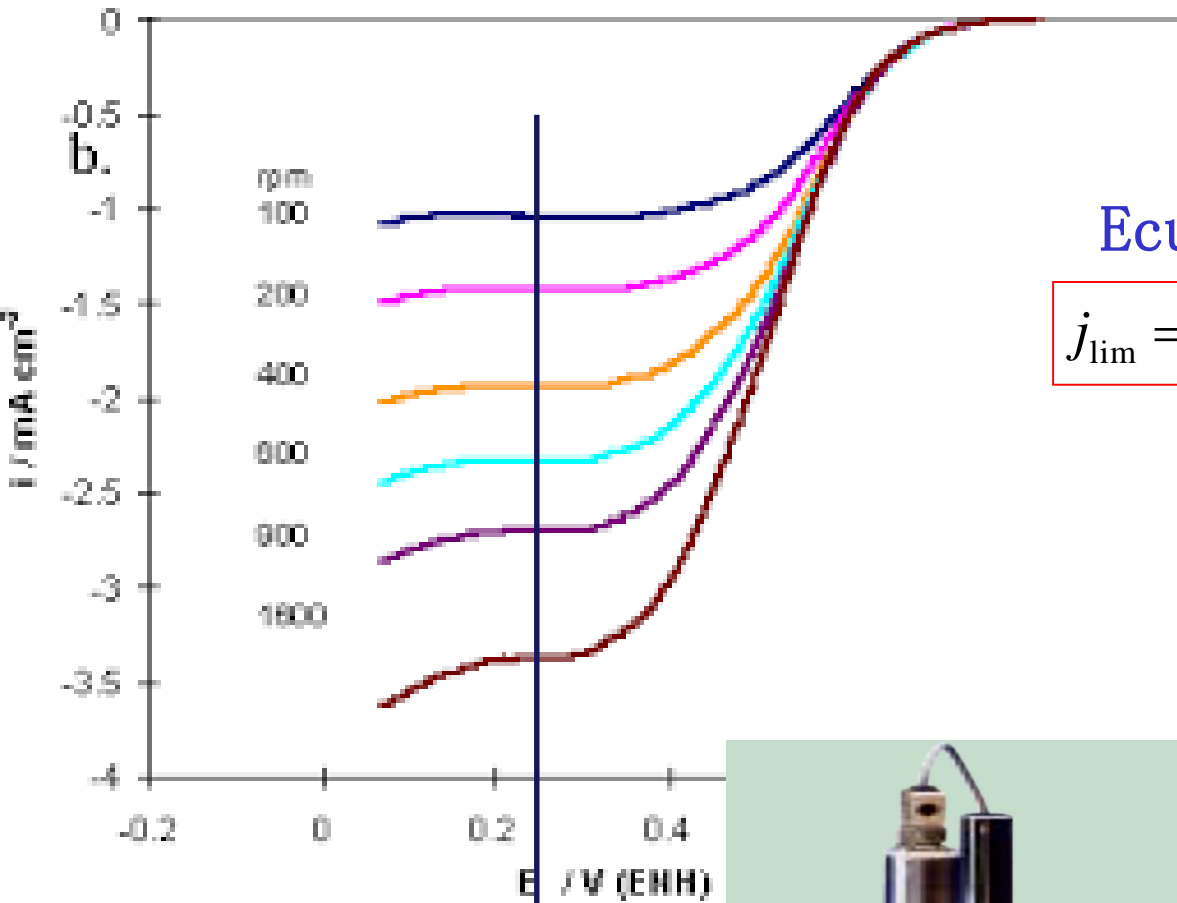
Para el caso que la concentración en la superficie del electrodo sea cero, tenemos el valor máximo de corriente o límite j_{lim}

$$j_{lim} = 0.62 n F D_j^{2/3} \nu^{-1/6} \omega^{1/2} C_j^o$$

Ecuación de Levich

Donde D_j es el coeficiente de difusión (cm^2/s), C_j^o la concentración volumétrica en el seno de la solución (mol/cm^3), ν la viscosidad cinemática del medio ($\text{St}=\text{cm}^2/\text{s}$), ω la velocidad angular de rotación del disco (rad/s).

Electrodo de disco rotante o rotatorio



Ecuación de Levich

$$j_{lim} = 0.62nFD_j^{2/3} \nu^{-1/6} \omega^{1/2} C_j^o$$

I_{Lim}

I_{Lim}



$\omega^{1/2}$

TRANSFERENCIA DE CALOR



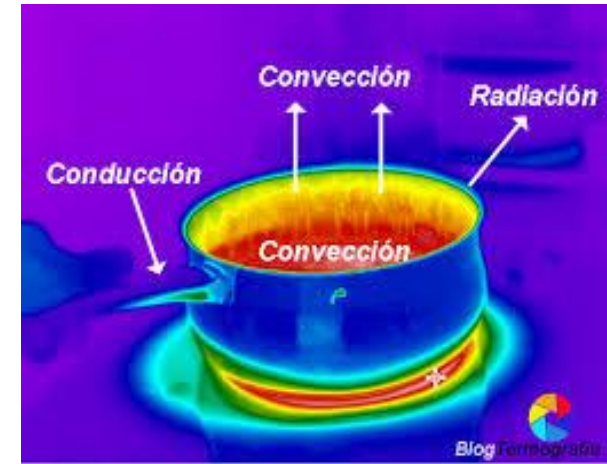
Conducción es el proceso en el que la energía térmica se transfiere por colisiones moleculares adyacentes a través del medio material. El medio en sí no se mueve.



Convección es el proceso en el cual el calor se transfiere mediante el movimiento real de un fluido.



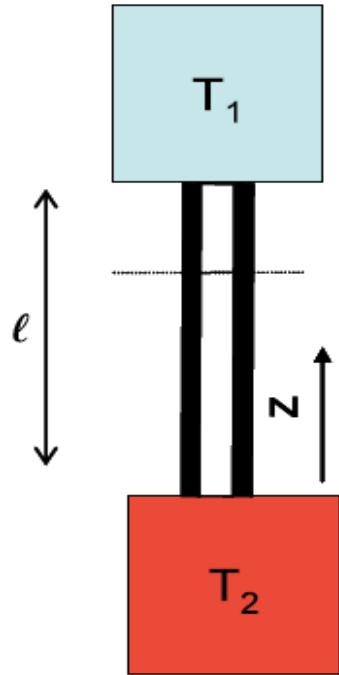
Radiación es el proceso por el cual el calor se transfiere en forma de ondas electromagnéticas.



El calor se transfiere mediante **convección**, **radiación** o **conducción**. Aunque estos tres procesos pueden tener lugar simultáneamente, puede ocurrir que uno de los mecanismos predomine sobre los otros dos.

Por ejemplo, el calor se transmite a través de una barra metálica fundamentalmente por **conducción**, al poner la mano sobre una fuente de calor la sensación de calor que percibimos es debida al aire caliente que asciende desde la fuente de calor por **convección**, y cuando nos colocamos

Conducción térmica



Ley de Fourier

Supongamos que ponemos un elemento en contacto con dos focos caloríficos a las temperaturas T_1 y T_2 y aislado térmicamente del resto como indica la figura. Existirá un flujo de calor desde el foco

caliente al frío ($T_2 > T_1$). Si mantenemos constante la temperatura de las fuentes, se alcanzará un régimen estacionario.

Experimentalmente se encuentra que la densidad de flujo de calor a través de cualquier plano perpendicular al eje z es proporcional al gradiente de temperatura.

$$\vec{q}_z \equiv \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z}$$

Ley de Fourier

Coeficiente de proporcionalidad κ (con unidades de $\text{Jm}^{-1}\text{s}^{-1}\text{K}^{-1}$ o en $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ en el sistema internacional) se conoce como *conductividad térmica*.

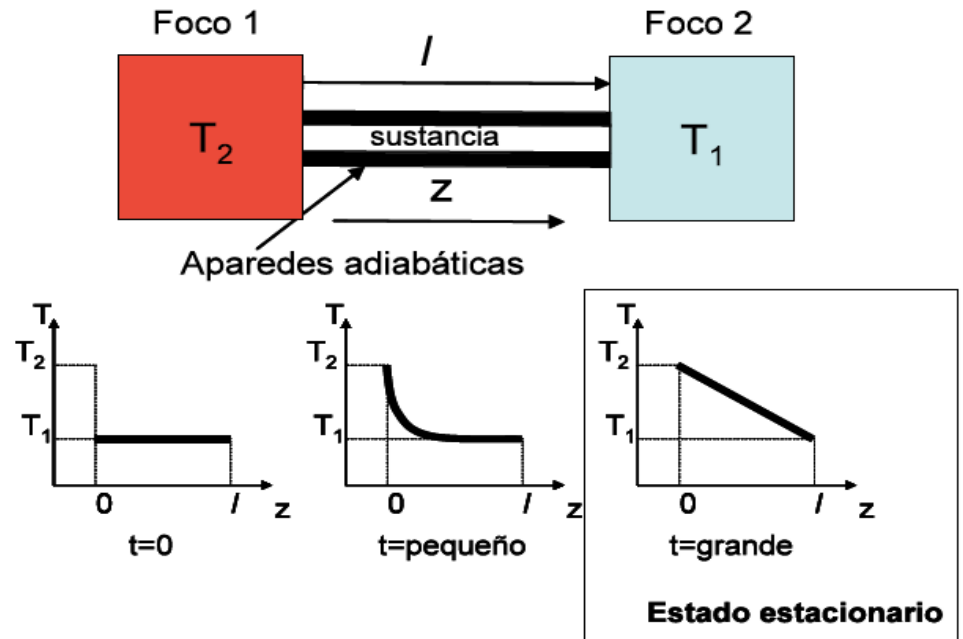
Donde A es el área de conducción, Q es la energía calorífica y \vec{q}_z es el vector flujo de calor en el medio en la dirección z 1-dim [$\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}$]

Ley de Fourier n-dim

En el régimen estacionario $dT/dz = T_2 - T_1 / l$ es constante por lo tanto el flujo es el mismo para cualquier valor de z . Así podemos obtener perfiles de temperatura como el indicado en la figura.

En general, si el transporte de calor se produce en más de una dirección la ley de Fourier se escribe como:

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T$$



Esta **conducción** es una transmisión de calor ligada a la **vibración de los átomos por el calor**. La misma es sin transporte macroscópico de materia, simplemente por transmisión de la energía cinética de las moléculas de la zona caliente (mayor energía cinética) hacia la zona fría (menor energía).

La ley de Fourier se aplica a gases, sólidos y líquidos, siempre que el transporte de calor se produzca únicamente por *conducción* (choques entre moléculas o átomos que forman la sustancia) y no por *radiación* o por *convección* (movimientos macroscópicos debido a diferencias de densidad, tal y como ocurre en la ascensión del aire caliente en la atmósfera).

Los valores de la conductividad son diferentes en sólidos, líquidos y gases debido a las diferencias de densidad. En general, cuanto más denso es el sistema más efectivo es el transporte por conducción y por lo tanto κ es mayor en sólidos que en los líquidos y en estos mayor que en los gases.

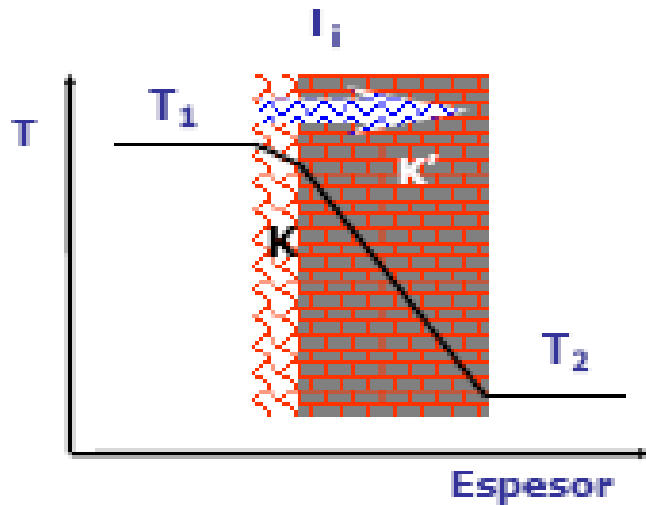
Sustancia	T/°C	$\kappa(\text{JK}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s}^{-1})$
aire	20	0.0235
$\text{CCl}_4(\text{l})$	20	0.1033
$\text{H}_2\text{O}(\text{l})$	27	0.6092
Al(s)	25	237
Fe(s)	25	80.4

En general la conductividad de una sustancia depende de la presión y la temperatura.

Para los gases κ aumenta con la temperatura, mientras que en los líquidos y sólidos puede aumentar o disminuir.

Transmisión de calor en una pared plana y pared cilíndrica

Ley de Fourier simetría plana

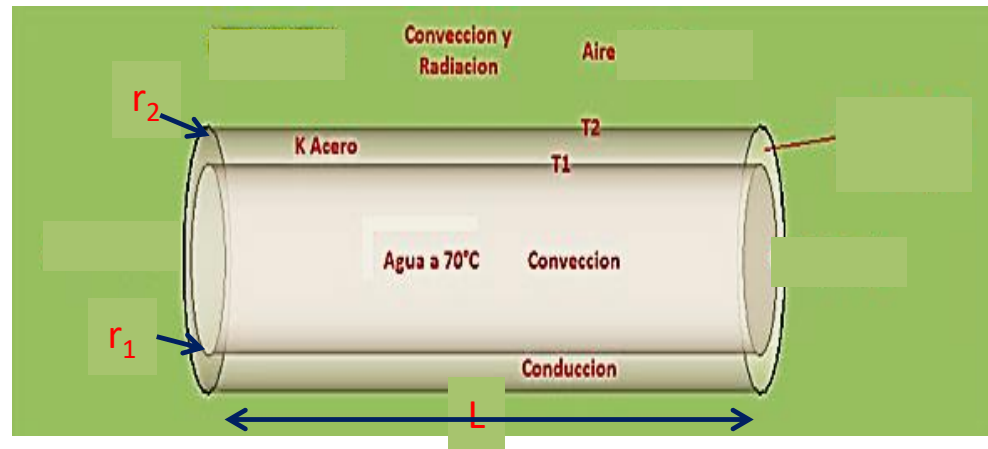


$$q(x) = \frac{dQ}{Adt} = -k \left(\frac{T_1 - T_2}{d} \right)$$

Donde **A** es el área de transmisión de calor y **d** es el espesor de la pared con $T_1 > T_2$ temperatura exterior mayor

Ley de Fourier simetría cilíndrica

$$q(x) = \frac{dQ}{dt} = -\kappa A \left(\frac{dT}{dr} \right)$$



Donde **A** es el área de transmisión de calor = $2\pi rL$ (con **L** longitud del cilindro) y **d** = $(r_2 - r_1)$ es el espesor de la pared con $T_1 > T_2$ temperatura interior mayor.

El tema es que **A** = $2\pi rL$ puede ser tanto la interna o la externa (siendo la externa mayor).

Transmisión de calor en una pared cilíndrica

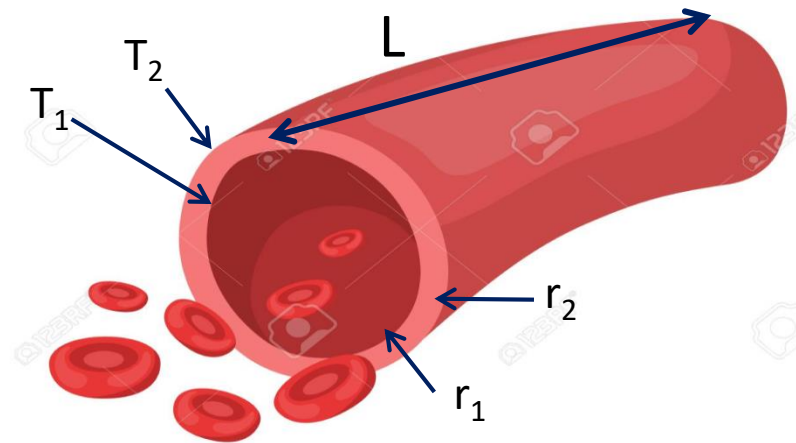
Ley de Fourier vasos sanguíneos

$$q(r) = -\kappa 2\pi r L \left(\frac{dT}{dr} \right)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{q(r)}{2\pi r} dr = -\kappa L \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\frac{q(r)}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = -\kappa L (T_2 - T_1)$$

$$q(r) = \frac{2\pi\kappa L (T_1 - T_2)}{\ln r_2 - \ln r_1}$$



Aquí resolvimos el problema de **conducción de calor** pero dentro del vaso hay convección debido al flujo sanguíneo y este movimiento puede ser causado por **fuerzas externas**, es decir, **convección forzada**; o por **gradientes de densidad** inducidos por las diferencias de temperatura, o sea, **convección natural**. Internamente las ecuaciones son diferentes pues están gobernadas por otro tipo de mecanismo de transporte de calor.

2ª. Ley de Fourier para difusividad térmica 1-dim

Conductividad térmica de diversos materiales

Compuesto	Tª (K)	K (Watt.m ⁻¹ K ⁻¹)
Aire	273	0,024
Corcho	298	0,055
Ferrosilicona	373	0,144
PET	298	0,15
Pollester	298	0,17
Rexinas epoxy	298	0,19
PVC	298	0,21
Arena silicica	373	0,26
Lana de vidrio	298	0,502
	273	0,552
Agua	298	0,606
	373	0,680
Vidrio "Pyrex"	373	1,254
Silice vitrea	373	1,48
Ladrillo refractario	1000	1,52
Acero inoxidable	373	16,24
Acero dulce	373	38,70
Hierro (fundición)	373	52,2
Aluminio	373	205,32
Cobre	373	375,84

$$q(x) = \frac{dQ}{A dt} = -\kappa_i \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$\alpha_i = \frac{\kappa_i}{\rho c_p}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa_i}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = \alpha_i \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

c_p es el calor específico isobárico [J K⁻¹ Kg⁻¹], ρ es la densidad [Kg m⁻³], κ_i es la conductividad térmica de la especie en el medio [W m⁻¹ K⁻¹], α_i es la difusividad térmica [m² s⁻¹ K⁻¹] y Q_i es la energía calorífica en el medio [J]

2ª. Ley de Fourier
n-dim

$$\frac{dT}{dt} = \alpha_i \nabla^2 T$$

Balances de calor: Cuando tenemos además de conducción térmica un consumo o producción de calor por medio de algún proceso debemos considerar un balance de calor con la conducción por Fourier.

TRANSFERENCIA DE CALOR por CONVECCIÓN

La **convección** es un fenómeno por el cual se transporta calor entre zonas con diferentes temperaturas y se produce únicamente por medio de materiales, la evaporación del agua o fluidos. La **convección** es la transferencia de calor por medio del movimiento del fluido.

Al calentar el agua en un recipiente, el agua que entra en contacto con la base del recipiente asciende al calentarse, mientras que el agua de la superficie desciende por los lados al enfriarse, y ocupa el lugar que dejó la porción caliente.

En la transferencia de calor **libre** o **natural**, un fluido es más caliente o más frío. El contacto con una superficie sólida, causa una circulación debido a las diferencias de densidades que resultan del gradiente de temperaturas en el fluido. La forma que encontró Newton para esta convección es:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = h_i A_s (T_s - T_i)$$

Ley de Enfriamiento de Newton

Siendo $Q(t)$ la cantidad de calor transportada en el tiempo o velocidad de transporte por convección. h_i el coeficiente convectivo (intercambio) de calor A_s el área de contacto del cuerpo con el fluido que transporta el calor T_s y T_i las temperaturas de la superficie del cuerpo y del fluido lejos del mismo, respectivamente.

Ley de Enfriamiento de Newton

$$\frac{dQ(t)}{dt} = h_i A_s (T - T_{amb})$$

Si la temperatura T del cuerpo es mayor que la temperatura del medio ambiente T_{amb} , el cuerpo pierde una cantidad de calor $dQ(t)$ en el intervalo de tiempo comprendido entre t y $t+dt$, disminuyendo su temperatura en dT .

$$dQ(t) = m_i c_p dT(t)$$

donde $m_i = \rho V$ es la masa del cuerpo (ρ es la densidad y V es el volumen), y c_p el calor específico.

La ecuación que nos da la variación de la temperatura T del cuerpo en función del tiempo es:

$$\rho V c_p \left(\frac{dT}{dt} \right) = -h_i A_s (T - T_{amb}) \quad \text{O bien;} \quad \frac{dT}{dt} = -k_i (T - T_{amb}) \quad k_i \equiv \frac{h_i A_s}{\rho V c_p}$$

Integrando esta ecuación con la condición que en cuando $t=0$, la temperatura del cuerpo es T_0 .

$$\ln(T - T_{amb}) = -k_i t + \ln(T_0 - T_{amb}) \quad \text{O bien;} \quad T = T_{amb} + (T_0 - T_{amb}) \exp(-k_i t)$$

Intercambiadores de calor

Es un dispositivo construido para intercambiar eficientemente el calor de un fluido a otro, tanto si los fluidos están separados por una pared sólida para prevenir su mezcla, como si están en contacto directo. Se usan mucho en refrigeración, acondicionamiento de energía, calefacción, síntesis química, etc. Un ejemplo básico de un intercambiador de calor es el radiador de un coche, en el que el líquido de radiador caliente es enfriado por el flujo de aire sobre la superficie del radiador.

TRANSFERENCIA DE CALOR por CONVECCIÓN

Convección térmica natural



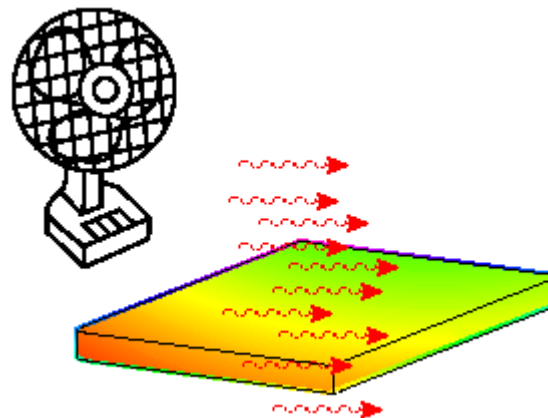
El **número de Nusselt (Nu)** es un adimensional que mide el aumento de la transferencia de calor desde una superficie por la que un fluido se mueve (por convección) con respecto al transporte de calor si sólo ocurriera por conducción.

El Nusselt puede verse como un gradiente adimensional de temperaturas en la superficie.

$$Nu = \frac{h_{conv} L}{K_{cond}}$$



Wilhelm Nusselt
25 de noviembre de 1882-
1 de setiembre de 1957



Convección térmica forzada

Siendo h_{conv} el coeficiente convectivo de calor, K_{cond} el coeficiente de conductividad térmica del fluido y L la longitud característica. Ambas transferencias de calor se consideran perpendiculares al flujo.

TRANSFERENCIA DE CALOR por RADIACIÓN

Ludwig Eduard Boltzmann
20 de febrero de 1844-
5 de setiembre de 1906



Ley de Stefan-Boltzmann

Cuando un cuerpo negro (absorbe toda la radiación en forma ideal y su emisividad es la unidad como el color negro) emite una radiación térmica lo hace con una potencia emisiva hemisférica proporcional a la cuarta potencia de su temperatura.

$$Q_i(t) = e_i \sigma T^4$$

Cuando tenemos un medio determinado:

$$Q_i(t) = e_i \sigma (T^4 - T_{\text{medio}}^4)$$

Con T y T_{medio} las temperaturas del cuerpo y del medio. Si son iguales el cuerpo no radia ni absorbe.

Donde e_i es la constante de emisividad del material (entre 0 y 1, 0.7 plásticos, 0.5 madera) depende de la naturaleza del material, tratamiento superficial y de la longitud de onda de emisión, σ es la constante de Stefan [$5.67 \cdot 10^{-8}$ en $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$] Q es el vector flujo de radiación térmica (potencia radiada o energía calorífica por unidad de área y tiempo) en el medio [W m^{-2}] y T es la temperatura efectiva de la superficie del material.

Ley de Planck

La **ley de Stefan** es la integración de la ley de radiación electromagnética de un cuerpo de Planck con la longitud de onda, o sea que se obtiene una potencia emisiva o calor.

La **ley de Planck** de un cuerpo negro en equilibrio térmico a una temperatura dada muestra la intensidad de la radiación emitida, I , por el cuerpo (o radiancia espectral) con una cierta temperatura T y frecuencia ν :

$$I(\nu, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right)^{-1}$$

Esta radiancia espectral, $I(\nu, T)$, es la cantidad de energía radiada por el cuerpo por unidad de superficie, tiempo, frecuencia y en un ángulo sólido dado.

$$Q(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{2\pi h}{c^2 \lambda^5} \left(e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1 \right)^{-1} d\lambda \longrightarrow Q(\lambda) = \frac{(\pi k)^4 (2\pi h c^2)}{15 (hc)^4} T^4$$

σ constante de Stefan

$$\sigma \equiv \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}$$

La longitud de onda en la que se produce el máximo de emisión viene dada por la **Ley de Wien** que expresa la dependencia recíproca de la longitud de onda con la temperatura.

Por lo tanto, a medida que la temperatura aumenta, el brillo de un cuerpo cambia del rojo al amarillo y al azul.

