

Mecánica Clásica (2023)

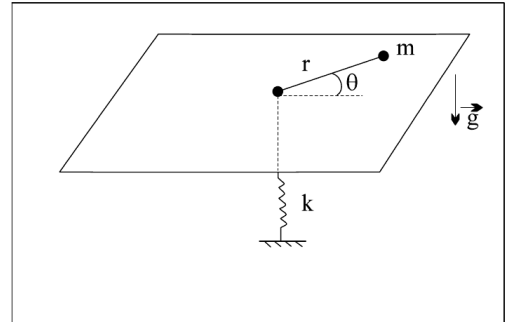
Práctico 4

Fuerzas Centrales

1. Una partícula P de masa m se mueve sin rozamiento sobre una mesa horizontal, unida a un hilo flexible, inextensible y sin masa que pasa por un orificio situado en la mesa. Inicialmente la partícula está describiendo un movimiento circular uniforme de radio a con velocidad v_a . Una persona tira *lentamente* del hilo (se puede considerar que en todo instante la velocidad radial es nula) hasta que la partícula describe una circunferencia de radio b .

- Calcule la velocidad v_b de la partícula cuando ésta describe la circunferencia de radio b , y compárela con v_a .
- Calcule las tensiones en el hilo, en los movimientos inicial y final.
- Calcule el trabajo realizado por la persona.

2. La partícula de masa m de la figura se mueve sobre una mesa lisa horizontal. La cuerda (flexible, inextensible y sin masa) unida a la partícula, pasa a través de un orificio en la mesa y está atada a un resorte de constante k . La longitud natural del resorte es tal que la fuerza del mismo es nula cuando r (distancia del orificio a la partícula) es igual a cero. En el instante inicial $r = R$, la velocidad radial de la partícula es nula y su velocidad angular ω .

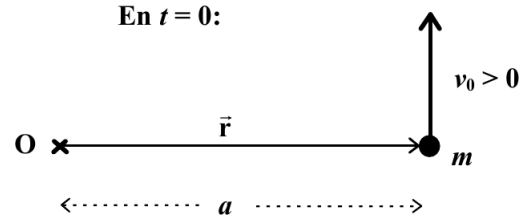


- Escriba las ecuaciones del movimiento de la partícula y hallar $L = \vec{r} \times \vec{p}$ en función de los datos iniciales del problema.
- Determinar la expresión de $\dot{r}^2$, en función de r^2 y los otros datos del problema.
- ¿Para qué valor de ω la trayectoria es circular? Sea ω_0 ese valor.
- Si $0 < \omega < \omega_0$ ¿llegará la partícula al orificio por donde pasa el hilo? Justifique su respuesta. En el caso en que su respuesta sea negativa ¿cuál es el valor mínimo de r de la trayectoria?
- Si $\omega > \omega_0$, calcule el valor de r máximo de esta nueva trayectoria.

3. Una partícula de masa m se mueve en un campo gravitatorio y existe además una fuerza proporcional a r^{-3} , ambos campos son centrales con centro O . La fuerza central resultante es:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k_1}{r^2}\hat{e}_r - \frac{k_2}{r^3}\hat{e}_r$$

con $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$. La partícula parte con velocidad v_0 perpendicular al eje Ox del dibujo y a una distancia R del origen O .

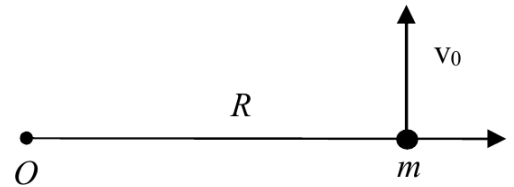


- Si $v_0^2 > \frac{k_2}{mR^2}$, bosqueje el potencial efectivo visto por la partícula. Halle la condición para que el movimiento sea acotado.
- Suponga que v_0 cumple la condición para que el movimiento sea acotado hallada en la parte a) y determine la ecuación polar de la trayectoria de la partícula: $r = r(\theta)$.
- Halle la separación angular entre dos máximos consecutivos de r y determine la condición que deben verificar los parámetros para que la órbita sea cerrada.

4. Sobre una partícula de masa m actúa una fuerza central atractiva inversamente proporcional al cubo de la distancia al origen O , o sea, una fuerza de componente radial $-k/r^3$. Vectorialmente esto se escribe como:

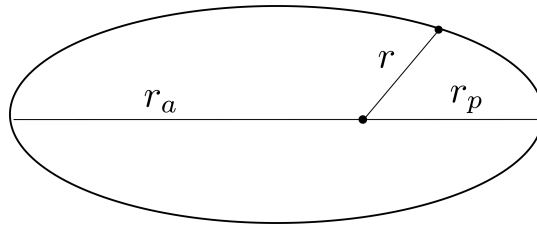
$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^3}\hat{e}_r,$$

con $k > 0$. En el instante inicial la partícula se encuentra a una distancia a del origen y su velocidad inicial, de magnitud v_0 , es perpendicular a $\vec{r}$.



- Halle la energía potencial, si es que existe, asociada a dicha fuerza.
- Escriba el Teorema de la Energía para este problema y grafique el potencial efectivo del movimiento radial de la partícula, para diferentes valores de v_0 . A partir de dicha figura discuta en qué regiones del plano es posible el movimiento de la partícula según sea v_0 .
- A partir de las ecuaciones de movimiento verifique que existe una velocidad inicial para la que el movimiento de la partícula sea circular uniforme. ¿Cuál es esa velocidad?
- Para una velocidad menor que la hallada en la parte anterior, determine cuál es la trayectoria que seguirá la partícula y verifique que la misma colapsa hacia el origen.

5. Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza central, cuyo potencial es de la forma: $U(r) = -K/r^\alpha$.
- Halle la frecuencia de una órbita circular con momento angular L dado.
 - Suponga que se perturba ligeramente la órbita circular por una cantidad radial z , de modo que: $r = r_0 + z$. Demuestre que el movimiento de z es periódico y halle su frecuencia. Para esto desarrolle $U'_{ef}(r)$ en la ecuación de Newton radial: $m\ddot{r} = -U'_{ef}(r)$ a primer orden en z en torno a r_0 y halle la ecuación diferencial que cumple $z(t)$.
 - Halle la condición que debe cumplir α para que la órbita perturbada sea cerrada, esto es, que la frecuencia de oscilación radial sea un múltiplo de la frecuencia de la órbita circular.
6. Un planeta esférico e inmóvil tiene masa M y radio R . Una partícula de masa m se dispara desde su superficie con velocidad $v = \frac{3}{4}v_{esc}$, siendo v_{esc} la velocidad de escape. Calcule la máxima distancia alcanzada por la partícula (medida desde el centro de fuerza) si se dispara:
- Radialmente
 - Tangencialmente a la superficie del planeta. En este caso bosquejar el potencial efectivo visto por la partícula.
7. Considere un satélite de masa m que se lanza desde la superficie de la Tierra verticalmente hacia arriba a gran altura y despreciando el rozamiento del aire.

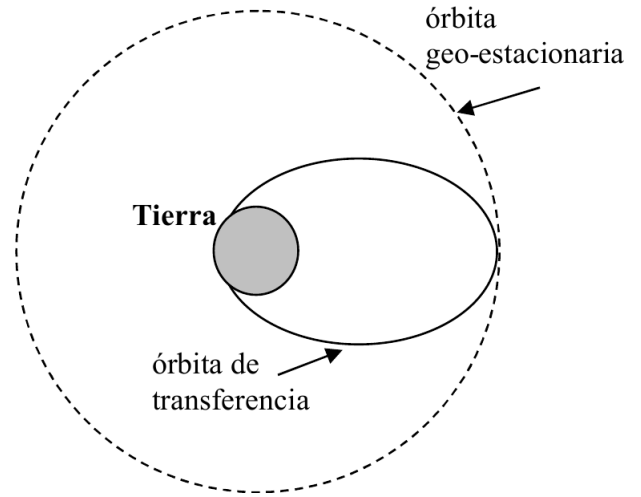


- Si la velocidad inicial del satélite es v_0 , exprese su velocidad v en función de su distancia r al centro de la Tierra.
- Calcule la velocidad v_0 mínima necesaria, en km/s , para el satélite de la parte a) pueda alcanzar una altura de $300km$ sobre la superficie terrestre (compárela con la velocidad de escape de la tierra).
- Considere ahora que el satélite se encuentra en órbita elíptica alrededor de la Tierra como se muestra en la figura. Si parte del apogeo (el punto más lejano a la Tierra) a una distancia máxima r_a , obtenga su velocidad en función de G , M_T (masa de la Tierra), r , r_a y r_p , siendo r_p la distancia en el perigeo (punto más cercano a la Tierra).

8. Julio Verne concibió un viaje a la Luna utilizando un cañón para lanzar una cápsula tripulada hacia nuestro satélite natural. Siendo menos ambiciosos que el mencionado novelista, consideraremos un viaje de ida a una órbita geo-estacionaria (Es decir una órbita para la cual la velocidad relativa entre el satélite y la Tierra es nula) utilizando su cañón. Ubicaremos dicho cañón sobre el ecuador y se lo apuntará según la vertical del lugar. Se tomará en cuenta la rotación de la Tierra (a una velocidad angular ω_T) pero se despreciarán los efectos disipativos de la atmósfera terrestre. Nuestra cápsula tendrá una masa m_C .

- a) Calcule el radio de la órbita geo-estacionaria R_G en función de g (aceleración de la gravedad en la superficie terrestre), R_T (radio de la Tierra) y ω_T .

Se desea alcanzar la órbita geo-estacionaria a través de una órbita de transferencia elíptica tangente a la órbita geo-estacionaria como la que se muestra en la figura.



- b) Calcule el valor de la constante l (módulo del momento angular) para la órbita de transferencia.
- c) Calcule la energía de la órbita de transferencia considerada (exprese el resultado en función de los parámetros anteriormente citados).
- d) Calcule la velocidad v_c que deberá tener la cápsula a la salida del cañón (en relación a éste) para ubicarse en la órbita de transferencia.
- e) Calcule el semieje mayor de la órbita de transferencia y el tiempo necesario para el viaje suponiendo que éste corresponde (aproximadamente) al semiperíodo de la órbita de transferencia.

9. Utilice las ecuaciones de Binet para una partícula de masa reducida μ y energía E en un campo gravitatorio: $U(r) = -K/r$. La solución de la ecuación homogénea es una senoide $u_H(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0)$

- a) Obtenga a la amplitud A en función de μ , K , E y el momento angular l .
- b) Escriba la ecuación de la órbita en coordenadas polares.
- c) Escriba la ecuación de la órbita en coordenadas cartesianas.
- d) En el caso de una órbita elíptica, exprese los semiejes mayor a y menor b en términos del parámetro de la cónica p y su excentricidad ϵ .

10. Sea una masa μ sometida a una fuerza central $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{K}{r^3}\vec{r}$. Tome la segunda ley de Newton expresada como $\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{K}{r^3}\vec{r}$ y multiplique el lado derecho y el lado izquierdo vectorialmente por $\vec{L} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}}$.
- Muestre que el lado izquierdo de esa ecuación vectorial se puede escribir como una derivada total respecto al tiempo de un producto que involucra al momento angular $\vec{L}$.
 - Muestre que el lado derecho de esa ecuación vectorial se puede escribir como una derivada total respecto al tiempo de un término proporcional a $\vec{r}$. Ayuda: utilice primero la regla para desarrollar el doble producto vectorial. Verifique que las dimensiones son correctas.
 - ¿Qué puede decir del vector $\vec{C} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - K\frac{\vec{r}}{r}$? Suponga que la energía mecánica es $E < 0$. ¿Qué dirección tiene ese vector $\vec{C}$ en el punto de intersección de la trayectoria elíptica con el eje mayor?
 - Calcule el modulo al cuadrado del vector $\vec{C}$ y expréselo en términos de E , l (modulo del momento angular), K y μ .
11. Imagine que mediciones nuevas y estraordinariamente precisas revelasen un error en la ley de Coulomb. La fuerza real que se ejerce sobre una carga puntual q en la posición $\vec{r}$ debido a otra carga puntual Q ubicada en el origen se encuentra que es:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \hat{e}_r,$$

donde λ es una constante nueva de la naturaleza (con dimensiones de longitud y muy grande, digamos de la mitad del radio del universo. De esta forma la corrección es muy pequeña). Considere, para este problema que la interacción es de esta forma y la carga Q está fija en el origen.

- Encuentre el potencial efectivo para la carga q (suponga que tiene una masa m) cuando se mueve bajo los efectos de esta fuerza.
- En el caso en que las cargas sean de signo opuesto, a diferencia del caso de conocido de la fuerza dada por la ley de Coulomb (i.e. $\lambda = \infty$), para un momento angular $\vec{L}$ de módulo l dado, el sistema no siempre admite órbitas acotadas. Para probar esto:
 - Muestre que la derivada respecto a r de la velocidad radial al cuadrado puede escribirse como:

$$\frac{d(\dot{r}^2)}{dr} = \frac{2k\lambda}{mr^3} \left[\frac{l^2}{\lambda mk} - x(1+x)e^{-x} \right],$$

siendo $k = \frac{|q||Q|}{4\pi\epsilon_0}$ y $x = r/\lambda$. Explique los razonamientos seguidos.

- Muestre que la función $x(1+x)e^{-x}$ presenta un máximo con $x > 0$ en $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y a partir de allí halle el valor crítico del momento angular l_{crit} por encima del cual el sistema no presenta órbitas acotadas.
- Bosqueje el potencial efectivo para valores del momento angular $l > l_{crit}$, $l < l_{crit}$ y $l = l_{crit}$ y explique los tipos de trayectorias posibles en cada caso discutiendo según la energía del sistema.