

Mecánica Clásica (2023)

Práctico 7

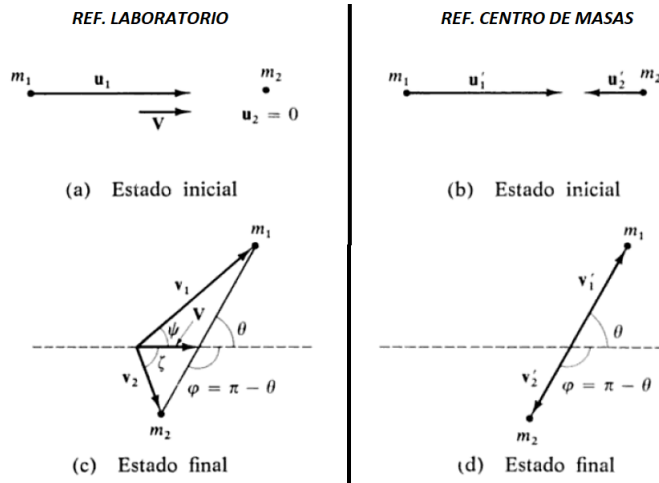
Sistemas de partículas y Cuerpos Rígidos

Colisiones

1. En el choque elástico de dos partículas, de masas m_1 y m_2 , las velocidades iniciales son $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2 = \alpha \vec{u}_1$ ($\alpha \neq 0$). Determinar las condiciones que deben cumplir u_1/u_2 y m_1/m_2 para que m_1 se encuentre en reposo después del contacto, cuando las energías cinéticas iniciales de las partículas sean iguales.
2. a) Demuestre que en un choque elástico entre la partícula 1 (inicialmente móvil) y la partícula 2 (inicialmente en reposo), el cociente entre la energía cinética final K_1 de la partícula 1 y la energía cinética K_0 inicial es

$$\frac{K_1}{K_0} = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\cos(\psi) + \frac{m_2 \cos(\theta - \psi)}{m_1} \right)^2,$$

donde ψ es el ángulo que se desvía la partícula 1 respecto de su trayectoria inicial en el referencia del laboratorio (es decir, donde la partícula 2 estaba inicialmente en reposo) y θ es el ángulo que se desvían las partículas en el referencia del centro de masas. Ver figura.



- b) Si denotamos como $\alpha \equiv m_2/m_1$ y $\gamma \equiv \cos(\psi)$. Demostrar que podemos reexpresar el resultado de la parte a) como:

$$\frac{K_1}{K_0} = \frac{1}{(1 + \alpha)^2} [2\gamma^2 + \alpha^2 - 1 + 2\gamma\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 - 1}].$$

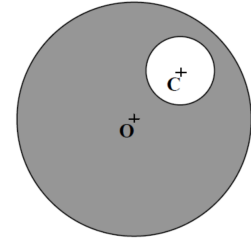
Represente gráficamente K_1/K_0 en función de ψ para $\alpha = 1, 2, 4$ y 12 . Estos gráficos corresponden, por ejemplo, a las energías de protones o de neutrones tras ser dispersados por: hidrógeno ($\alpha = 1$), deuterio ($\alpha = 2$), helio ($\alpha = 4$) y carbono ($\alpha = 12$).

3. Una partícula de masa m_1 y velocidad inicial $\vec{u}_1$ en el laboratorio, choca con una partícula de masa m_2 que se encuentra en reposo en el sistema del laboratorio. La partícula m_1 sufre una desviación ψ respecto de su trayectoria inicial adquiriendo una velocidad final de módulo $v_1(\psi)$. Determinar la superficie tal que el tiempo de viaje de la partícula dispersada desde el punto de choque hasta dicha superficie sea independiente del ángulo de desviación. Examine los casos $m_2 = m_1$, $m_2 = 2m_1$ y $m_2 = \infty$.

Sistemas de Partículas

4. Halle el centro de masa de las siguientes figuras homogéneas (con densidad de masa uniforme):
- Sector de círculo de ángulo al centro 2α .
 - Arco de circunferencia de ángulo al centro 2α .
 - Triángulo isósceles de base $2r$ y altura h .
 - Cono de revolución de radio r y altura h .

5. Halle el centro de masa de un disco de radio a que tiene un agujero circular de radio b . Este agujero está centrado en un punto C que dista d del centro O del disco. Supondremos se verifica que $0 < d < a - b$.



6. Si el torque de las fuerzas externas para un sistema de partículas respecto a un punto de referencia Q_1 se define como:

$$\vec{\mathcal{T}}_{Q_1}^{ext} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{Q_1}) \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

- a) Mostrar que respecto a otro punto de referencia Q_2 el torque se puede expresar como:

$$\vec{\mathcal{T}}_{Q_1}^{ext} = \vec{\mathcal{T}}_{Q_2}^{ext} + \vec{F}_{neta} \times (\vec{r}_{Q_1} - \vec{r}_{Q_2}).$$

- b) Análogamente, obtenga que para el momento angular se tendrá:

$$\vec{L}_{Q_1}^{ext} = \vec{L}_{Q_2}^{ext} + \vec{p} \times (\vec{r}_{Q_1} - \vec{r}_{Q_2}).$$

7. a) Demuestre que el conjunto de ecuaciones dado por una primera cardinal y una segunda cardinal, aplicada en un punto $\vec{r}_Q$, es equivalente a una primera cardinal y una segunda cardinal aplicada en otro punto $\vec{r}_R$ cualquiera. Es decir:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{P}} &= M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{neta} \\ \dot{\vec{L}}_Q &= \vec{P} \times \dot{\vec{r}}_Q + \vec{\mathcal{T}}_Q^{ext} \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} \dot{\vec{P}} &= M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{neta} \\ \dot{\vec{L}}_R &= \vec{P} \times \dot{\vec{r}}_R + \vec{\mathcal{T}}_R^{ext} \end{aligned} \right.$$

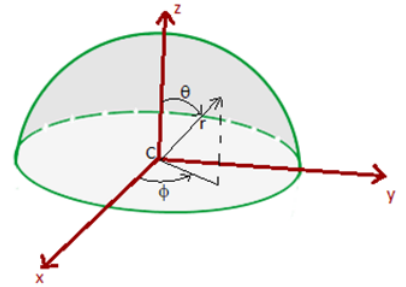
- b) Demuestre análogamente que el conjunto de ecuaciones dado por una primera cardinal y una segunda cardinal en un punto $\vec{r}_Q$, es equivalente al conjunto de tres ecuaciones obtenido de aplicar la segunda cardinal en tres puntos no alineados cualesquiera, por ejemplo, $\vec{r}_Q$, $\vec{r}_R$ y $\vec{r}_S$ (Sugerencia: usar fórmulas de cambio de momentos):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{P}} &= M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{neta} \\ \dot{\vec{L}}_Q &= \vec{P} \times \dot{\vec{r}}_Q + \vec{\mathcal{T}}_Q^{ext} \end{aligned} \right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{\vec{L}}_Q = \vec{P} \times \dot{\vec{r}}_Q + \vec{\mathcal{T}}_Q^{ext} \\ \dot{\vec{L}}_R = \vec{P} \times \dot{\vec{r}}_R + \vec{\mathcal{T}}_R^{ext} \\ \dot{\vec{L}}_S = \vec{P} \times \dot{\vec{r}}_S + \vec{\mathcal{T}}_S^{ext} \end{cases}$$

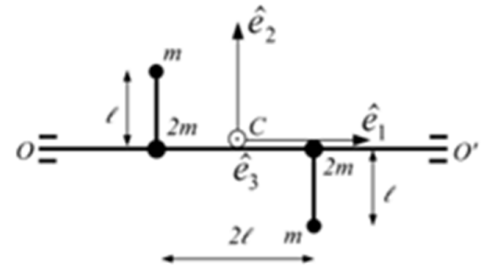
Cuerpos Rígidos

8. Considere una semiesfera de masa M y radio R .

- a) Halle el centro de masas de la semiesfera (es conveniente utilizar el sistema de referencia de la figura siguiente).
b) Halle el tensor de inercia de la semiesfera en torno al punto C, en el sistema de referencia de la figura.



9. El rígido de la figura de abajo está formado por dos masas $2m$, separadas una distancia $2l$ y montadas simétricamente con respecto al punto medio C del eje OO' , sujetas a dos masas m por medio de barras de largo l perpendiculares al eje OO' . El conjunto de las cuatro masas está en un mismo plano. Tanto las barras que une las masas como el eje OO' son de masa despreciable.



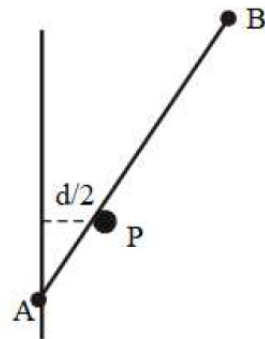
- a) Calcule las componentes del tensor de inercia respecto a C .
b) Pasando a ejes principales, diagonalice el tensor de inercia obtenido en a).

10. Halle el tensor de inercia en el centro de masa G de los siguientes sistemas rígidos homogéneos:

- a) Disco de radio R .
b) Placa rectangular de lados a y b .
c) Superficie esférica de radio R .
d) Esfera de radio R .
e) Elipsoide de semiejes a , b y c .

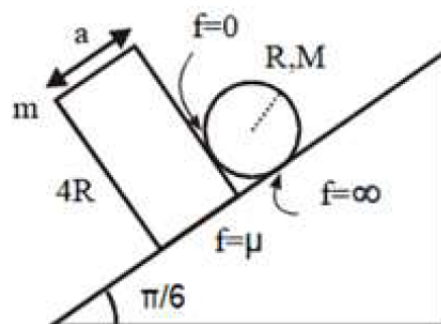
11. Una barra AB de longitud $2d$ y masa M está apoyada en un punto P que dista $d/2$ de una pared vertical como se muestra en la figura. El extremo A de la barra se apoya en la pared vertical.

- Suponiendo que no hay fricción entre la barra y la pared determinar el ángulo ϕ de equilibrio.
- Suponiendo ahora que hay fricción, determinar el mínimo coeficiente μ para que $\phi = \pi/4$ sea una posición de equilibrio.

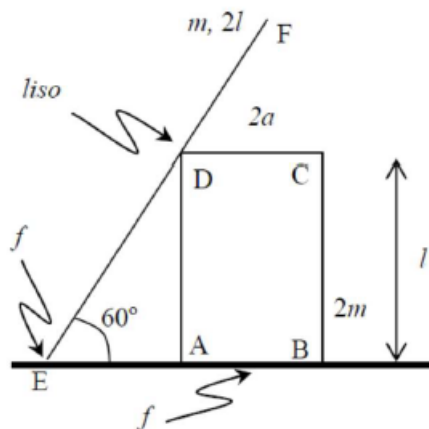


12. Un disco de radio R y masa M está apoyado sobre una placa rectangular de base a y altura $4R$ con masa m . No hay fricción entre el disco y la placa.

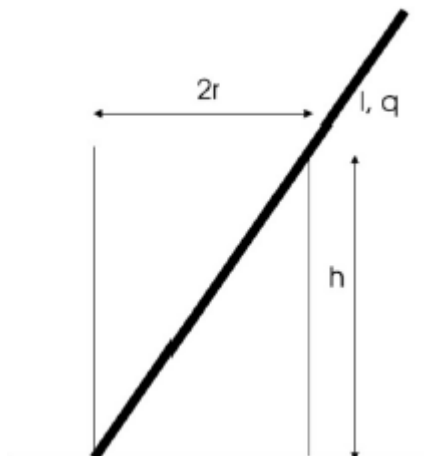
- Determinar el mínimo valor de a para el cual es posible el equilibrio.
- Determinar el mínimo coeficiente de fricción entre la placa y plano inclinado compatible con el equilibrio.
- ¿Qué ocurre si $m = 2M$, $\mu = 0,8$ y $a = 2R$?



13. Una placa rectangular $ABCD$ tiene apoyada su cara AB sobre el suelo como indica la figura. $AB = 2a$ y $BC = l$ y se encuentra en un plano vertical. Una barra homogénea EF de longitud $2l$ está apoyada sobre el suelo en su extremo E y descansa sobre el vértice D de la placa formando un ángulo de 60° con la horizontal. Los contactos con el suelo tienen coeficiente de rozamiento f , mientras que el contacto entre la placa y la barra es liso. Discuta el equilibrio del sistema según los valores de los parámetros f , l y a ; diciendo cómo se rompe el equilibrio cuando alguna condición no se verifica.



14. Un cilindro hueco sin fondo, de radio r , altura h , y peso P descansa sobre una superficie horizontal. Una varilla rígida, de longitud l y peso por unidad de longitud q está apoyada al suelo y el cilindro como muestra la figura. Todos los contactos son sin rozamiento.



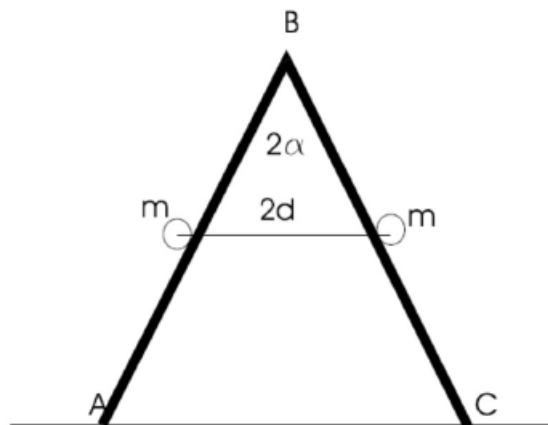
- Determine, en función de r , h , P y q la longitud máxima que puede tener la varilla para que exista equilibrio.
- Indique la forma en la que el equilibrio se rompe al superarse la longitud hallada anteriormente.

15. Sobre la caja de un camión está apoyado un lavarropas (que modelaremos por una placa cuadrada y homogénea) de lado l y masa M . El contacto entre las superficies tiene coeficiente de rozamiento f . El camión, partiendo del reposo, es acelerado con aceleración constante a .

- Halle la condición para que el lavarropas se mantenga en equilibrio relativo en un entorno del instante inicial.
- Halle la condición para que el lavarropas deslice sin volcar en un entorno del instante inicial.
- Halle la condición para que el lavarropas vuelque sin deslizar en un entorno del instante inicial.
- Discuta en función de f y de a/g las distintas maneras de romperse el equilibrio, haciendo una gráfica mostrando diferentes regiones.

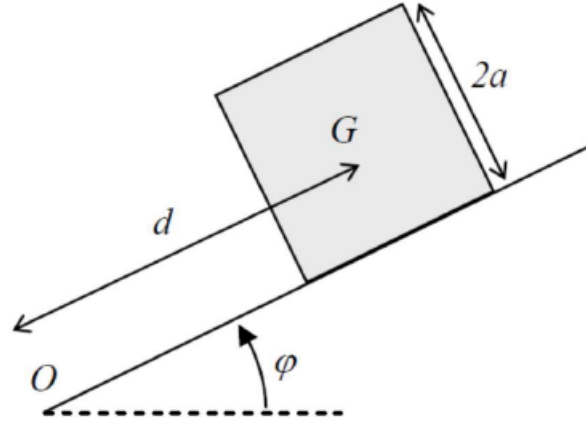
Sugerencia: Trabaje en el sistema no inercial fijo al camión.

16. Una escalera ABC , de lados $AB = BC = l$, y de masa despreciable, está apoyada sobre el piso horizontal, siendo el contacto rugoso de coeficiente f . Dos partículas de masa m cada una, están apoyadas en la escalera y unidas entre sí por un hilo de masa despreciable y longitud d . Los dos brazos de la escalera están articulados en B .



- Sabiendo que $f = 0,25$ y $\alpha = 30^\circ$, halle los valores de d para los que existe equilibrio.
- Suponiendo ahora que hay rozamiento con coeficiente $f = 0,25$ entre la escalera y las dos masas, halle el rango de valores del parámetro d que permiten el equilibrio.

17. Una placa cuadrada, homogénea, de lado $2a$, está apoyada sobre una recta que gira alrededor de un punto O , con aceleración angular α constante ($\phi(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2$). La distancia entre la placa y el punto O es $d - a$ (ver figura). El coeficiente de rozamiento estático entre la placa y la recta es f_s . En este ejercicio no hay peso.



- Suponiendo que la placa no se mueve respecto a la recta, halle la aceleración de su centro.
- Suponiendo que la placa no vuelca, halle la condición para que la placa no deslice en un entorno del instante inicial.
- Halle el tiempo que demora la placa en deslizar.
- Suponiendo que la placa no desliza, halle la condición para que la placa no vuelque en un entorno del instante inicial. Observe que $\dot{L}_G = \frac{2}{3}ma^2\alpha$

18. Una placa triangular ABC y un disco de centro O y radio R , ambos de masa m , están contenidos en un plano vertical y dispuestos como indica la figura. Es decir: la placa triangular tiene su lado AB apoyado sobre una pared vertical, y un punto de su hipotenusa se apoya sobre el disco, que a su vez está apoyado sobre el piso horizontal. La placa ABC es isósceles con $AB = AC = L$ y el ángulo $\angle BAC$ es recto. Investigue en qué casos existe equilibrio, sabiendo que el contacto placa-pared es liso, mientras que los contactos placa-disco y disco-piso son rugosos de coeficiente de rozamiento f . Especifique cómo se rompe el equilibrio en caso que alguna condición no se cumpla.

Nota: La discusión podrá hacerse en función de la distancia del punto D a la pared.

