

Continuamos el estudio del problema de Kepler, el cual habíamos reducido al problema

$$u''(\theta) + u(\theta) = \frac{G\mu^2 M}{l^2} \quad \text{siendo } u = \frac{1}{r} \quad \text{y } l = |\vec{L}_0| = \mu r^2 \dot{\theta}$$

y habíamos resuelto como:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\theta + \delta)} \quad \text{siendo } p \equiv \frac{l^2}{G\mu^2 M}$$

Notemos que no hemos hallado la ley horaria sino la órbita de la partícula ficticia de masa  $\mu$

$$r(t) = r(\theta(t)) \quad \text{y} \quad \dot{\theta} = \frac{l}{\mu p^2} (1 + \varepsilon \cos(\theta + \delta))^2$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_f} \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos(\theta + \delta))^2} dt = \frac{l}{\mu p^2} \int_0^t dt = \frac{l}{\mu p^2} t$$

$$\frac{lt}{\mu p^2} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos(\theta + \delta))^2} = \frac{\varepsilon \sin(\theta + \delta)}{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)(1 + \varepsilon \cos(\theta + \delta))} + \frac{2 \tanh^{-1} \left( \frac{(\varepsilon - 1) \tan(\frac{\theta + \delta}{2})}{i \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)}{i(1 - \varepsilon^2) \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

luego invertimos para hallar  $\theta(t)$  y luego  $r(\theta(t)) \dots$

Claramente, estas son expresiones engorrosas de las que resulta difícil obtener alguna información cualitativa del comportamiento de la partícula. Sin embargo, sin necesidad de pasar por este procedimiento, las leyes de Kepler rescatan algunos comportamientos generales de interés del movimiento de los cuerpos del sistema solar.

### Leyes de Kepler

- I) Las órbitas planetarias son elípticas con el Sol en un foco
- II) El vector radial  $r$  recorre áreas iguales en tiempos iguales
- III) El cuadrado del período varía con el cubo del semieje mayor (elipse).

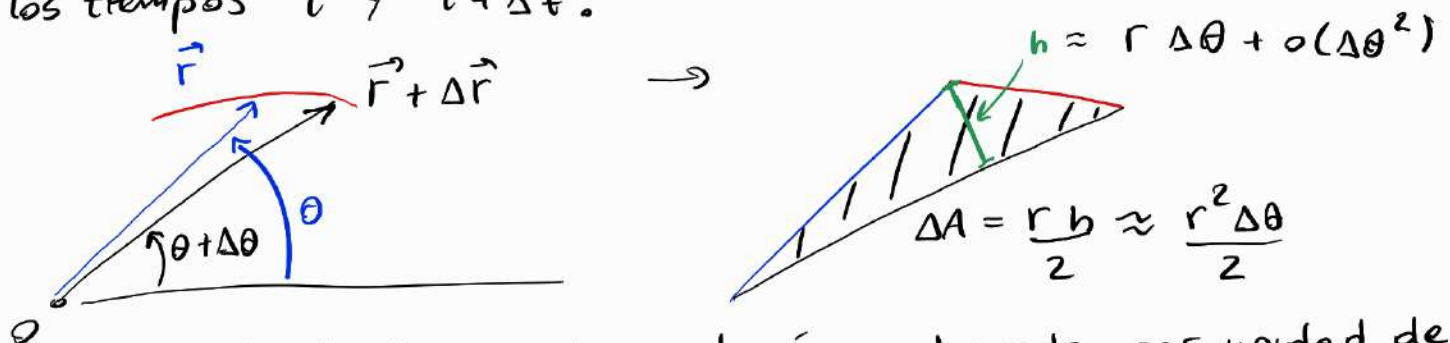
La (II) de estas leyes es la más general y aplica, no solo al problema de Kepler, sino a todos los problemas de fuerzas centrales. Por esto comenzamos allí.

### Prueba de (II):

Sea el movimiento de un cuerpo de masa  $\mu$  bajo la acción de una fuerza central  $F(r)\hat{e}_r$ .

Entonces dada la siguiente configuración general en los tiempos  $t$  y  $t + \Delta t$ :

El área barrida en un intervalo pequeño de tiempo  $\Delta t$  es:



y por lo tanto la tasa de área barrida por unidad de tiempo es:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r^2 \Delta\theta}{2 \Delta t} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{L}{2\mu} = \text{cte} !!$$

### Prueba de (I):

Sabemos que  $r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\theta} \Rightarrow r = p - \epsilon r \cos\theta$

Por otro lado, en las coordenadas polares es:

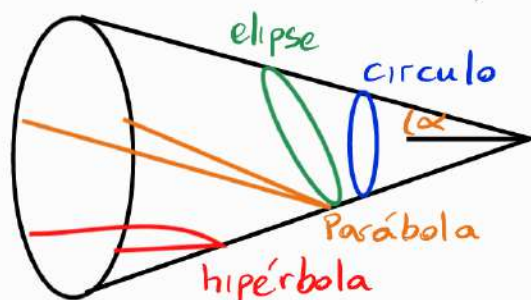
$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases} \Rightarrow r = p - \epsilon x$$

Además es  $r^2 = x^2 + y^2$  y, por lo tanto es

$x^2 + y^2 = p^2 - 2p\epsilon x + \epsilon^2 x^2$  que, reordenando, podemos transformar en

$$x^2(1 - \epsilon^2) + 2p\epsilon x + y^2 = p^2 \quad (\text{E.C.}) \quad (\text{ecuación de la cónica})$$

Observación: Recordar que la ecuación que describe cualquier sección de la cónica es:  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$



veamos lo siguiente:

- si  $\epsilon = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = p^2$  y la órbita es un círculo  
(Esto ya lo veíamos de  $r = \frac{p}{1+0 \cdot \cos(\theta)} \Rightarrow r(\theta) = p = \text{cte}$ )
- si  $\epsilon = 1 \Rightarrow 2px + y^2 = p^2 \Rightarrow x = \frac{p}{2} + \frac{y^2}{2p}$  parábola!
- si  $\epsilon \neq 1 \Rightarrow$  E.C. se puede transformar en

$$x^2 + 2 \frac{p\epsilon}{1-\epsilon^2} x + \frac{y^2}{1-\epsilon^2} = \frac{p^2}{1-\epsilon^2}$$

completando el cuadrado en  $x$  es:

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 + 2 \frac{p\epsilon}{1-\epsilon^2} x + \left(\frac{p\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2}_{(x-x_0)^2 \text{ con } x_0 = -\frac{p\epsilon}{1-\epsilon^2}} - \left(\frac{p\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\epsilon^2} = \frac{p^2}{1-\epsilon^2}$$

$$\Rightarrow (x+x_0)^2 + \frac{y^2}{1-\epsilon^2} = p^2 \left[ \frac{\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^2} + \frac{1}{1-\epsilon^2} \right] = \left( \frac{p}{1-\epsilon^2} \right)^2$$

y finalmente es:

$$\left( \frac{x-x_0}{c_1} \right)^2 + \left( \frac{y-y_0}{c_2} \right)^2 = 1 \quad (\text{E.E.H.})$$

$$\text{con } x_0 = -\frac{p\epsilon}{1-\epsilon^2}, y_0 = 0, c_1 = \frac{p}{1-\epsilon^2}, c_2 = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

Vemos que si  $0 < \epsilon < 1 \Rightarrow c_2$  es real y (E.E.H.) es la ecuación de una elipse.

Por otro lado, si  $\epsilon > 1 \Rightarrow c_2$  es imaginario y (E.E.H.) se convierte en

$$\left( \frac{x-x_0}{c_1} \right)^2 - \left( \frac{y-y_0}{c'_2} \right)^2 = 1 \quad \text{con } c'_2 = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2-1}} \in \mathbb{R}$$

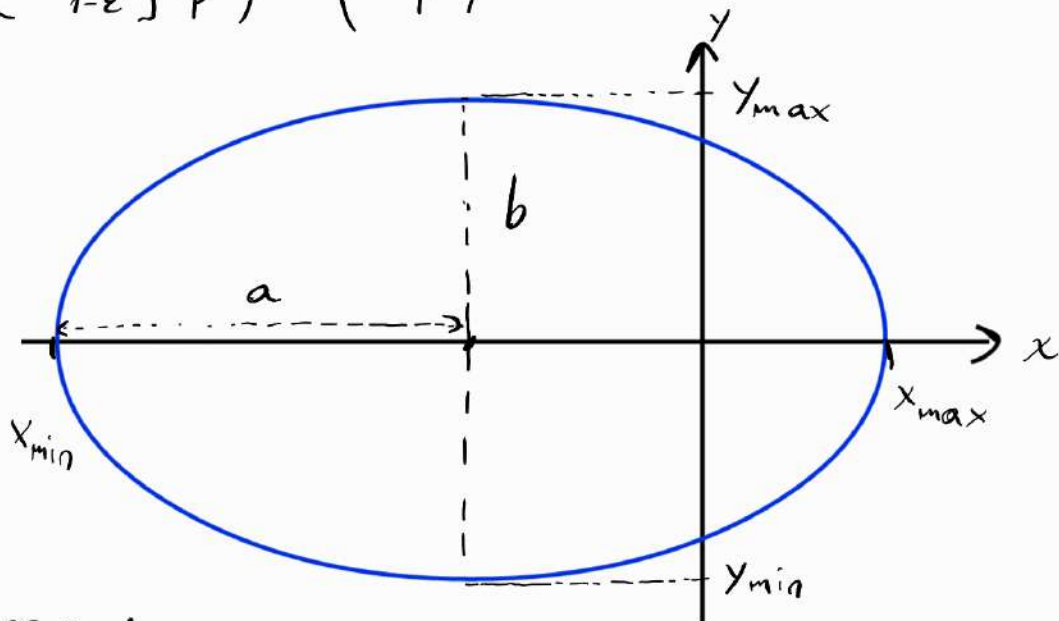
dando lugar, por lo tanto, a la ecuación de una hipérbola

Los planetas deben tener órbitas tales que  $r < \infty \forall \theta$   
y entonces es  $0 \leq \epsilon < 1$  ya que  $r = \frac{p}{1+\epsilon \cos \theta}$ .

Prueba de (III):

Tenemos la elipse

$$\left( \left[ x + \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \right] \frac{1-\varepsilon^2}{p} \right)^2 + \left( y \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{p} \right)^2 = 1 \quad (*)$$



Los semiejes son:

$$b = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$$

$$y_{\max} = -y_{\min} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad x=0 \text{ en } (*)$$

$$a = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

$$x_{\max} = \frac{p}{1-\varepsilon^2} - \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2} = \frac{p(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon^2} = \frac{p}{1+\varepsilon} \quad y=0 \text{ en } (*)$$

$$x_{\min} = -\frac{p}{1-\varepsilon^2} - \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2} = -\frac{p(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon^2} = -\frac{p}{1-\varepsilon}$$

Por lo que concluimos que:

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$a = \frac{p}{2} \left( \frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon} \right) = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$$

Es decir que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} \\ b^2 = pa \end{array} \right.$$

Ahora bien, como  $\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$  el cuerpo barrera toda la elipse de área  $A = \pi ab$  en un tiempo  $T$  que es el período de la órbita (es decir, el año) dado por:

$$\Rightarrow \frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi \sqrt{p} a^{3/2}}{T} = \frac{l}{2\mu} \quad \text{pero } p = \frac{l^2}{G\mu^2 M} \Rightarrow \sqrt{p} = \frac{l}{\mu \sqrt{GM}}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{a^{3/2}}{T} = \frac{\sqrt{GM}}{2\pi} \right]$$

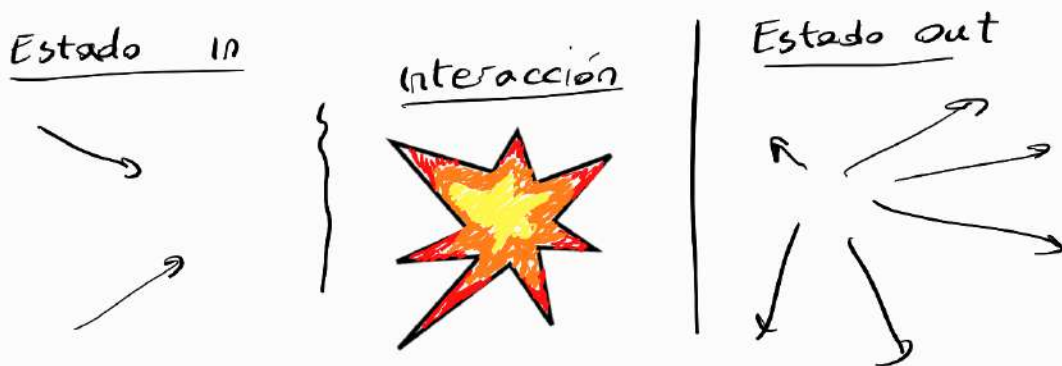
## I.5.4 - Colisiones

El estudio de las colisiones es de vital importancia para el estudio de la física fundamental. En las colisiones, las partículas interactúan de forma muy intensa y esto nos permite adentrarnos a (intentar) comprender el comportamiento de las fuerzas a escalas más pequeñas.

La mayoría de los descubrimientos de la composición de la materia y de las interacciones fundamentales se realizaron/realizan haciendo chocar cosas y "viendo" que pasa luego.

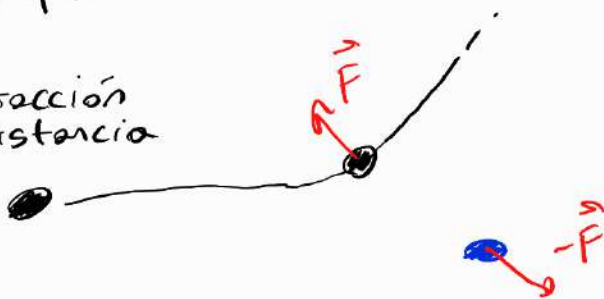
Así funcionan los estudios realizados con aceleradores de partículas, difracción de neutrones o rayos X, eco-Doppler, etc.

Enviamos algo conocido (in) y estudiamos las características de lo que sale luego.

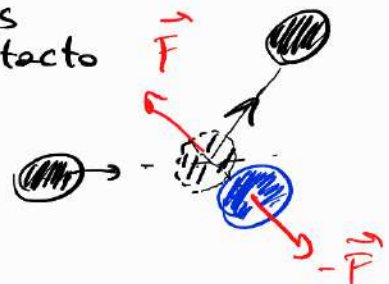


### Ejemplos

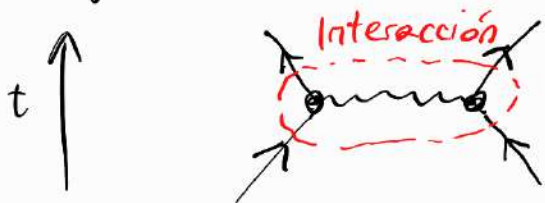
- Interacción a distancia



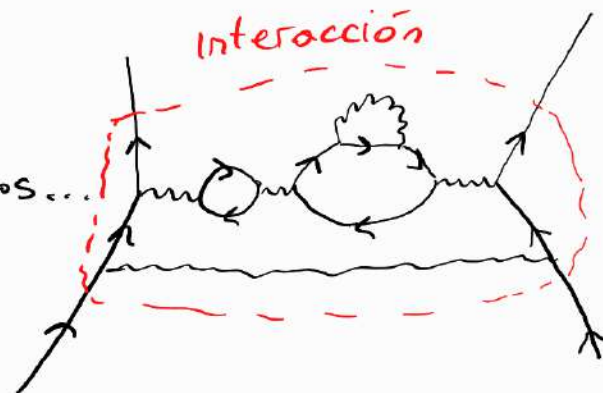
Fuerzas de contacto



- Esto mismo es lo que se simboliza en los famosos diagramas de Feynman



o más complejos...



## Conservación de la cantidad de movimiento

Hasta ahora venimos discutiendo siempre (o casi) a los cuerpos como partículas puntuales. El primer problema de dos partículas que consideramos fue el de dos cuerpos donde introdujimos el concepto de centro de masas al definir la variable  $\vec{R}$ .

Ahora procederemos, de forma parecida ya que, nuevamente, analizaremos la interacción entre 2 partículas.

Para esto vamos a notar lo siguiente, consideremos 2 partículas que interactúan entre sí, además de interactuar con el entorno. Será para éstos:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{ext,1} + \vec{F}_{2,1}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{ext,2} + \vec{F}_{1,2}$$

donde  $\vec{F}_{1,2}$  es la fuerza que la partícula 1 realiza sobre la partícula 2 y  $\vec{F}_{2,1}$  la fuerza de 2 sobre 1.  $\vec{F}_{ext,i}$  es la fuerza externa (es decir, las fuerzas que no son  $\vec{F}_{1,2}$  o  $\vec{F}_{2,1}$ ) sobre la partícula  $i$ , siendo  $i=1$  ó  $i=2$ .

Vamos a considerar que las fuerzas  $\vec{F}_{1,2}$  y  $\vec{F}_{2,1}$  cumplen la 3<sup>ra</sup> ley de la mecánica Newtoniana  $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$ .

En general, si las fuerzas  $\vec{F}_{1,2}$  y  $\vec{F}_{ext,i}$  son del mismo orden deberemos tener todo en cuenta para analizar el movimiento. En cambio, si momentáneamente  $|\vec{F}_{2,1}| \gg |\vec{F}_{ext,1}|$  (y  $|\vec{F}_{ext,2}| \ll |\vec{F}_{1,2}|$ ) entonces, durante un lapso de tiempo será:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} \approx \vec{F}_{2,1} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} \approx \vec{F}_{1,2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta\vec{p}_1 \approx \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_{2,1} dt' \\ \Delta\vec{p}_2 \approx \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_{1,2} dt' \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta\vec{p}_1 \approx -\Delta\vec{p}_2 \\ \text{ó} \\ \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \approx 0 \end{array} \right.$$

A la cantidad  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$  le llamamos cantidad de movimiento total  $\vec{P}_{tot}$  del sistema.

Cuando dos partículas chocan se da, justamente, esta situación y, durante el corto período de tiempo que dure la intensa interacción entre las partículas es  $|\vec{F}_{ch}| \gg |\vec{F}_{ext}|$  y, por lo tanto, la cantidad de movimiento total se conserva i durante el choque.

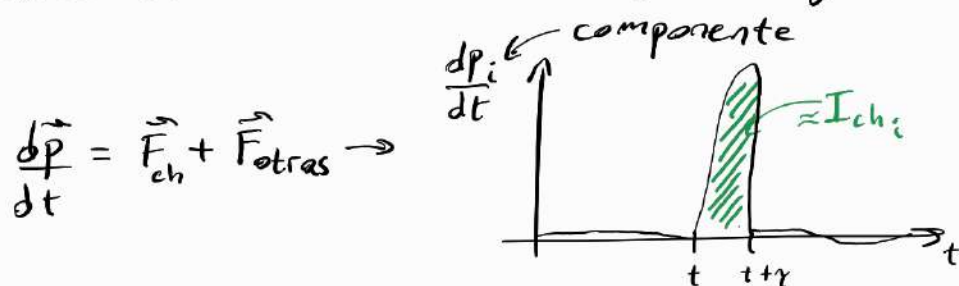
Por supuesto, es posible que la cantidad de movimiento de cada partícula varíe rápidamente. De hecho, si una partícula recibió una fuerza muy intensa  $\vec{F}_{ch}$  durante un breve período de tiempo entre  $t$  y  $t+\tau$  el impulso de dicha fuerza, definido como  $\vec{I} = \int_t^{t+\tau} \vec{F} dt$ , será tal que;

$$\vec{p}(t+\tau) - \vec{p}(t) = \int_t^{t+\tau} \frac{d\vec{p}}{dt'} dt' = \int_t^{t+\tau} (\vec{F}_{ch} + \vec{F}_{otros}) dt' = \vec{I}_{ch} + o(\vec{F}_{otros} \tau)$$

pero si  $\tau$  es muy pequeño entonces

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}(t+\tau) - \vec{p}(t) \approx \vec{I}_{ch}$$

Podemos visualizar esto mismo de forma gráfica como:



Volviendo al choque de dos partículas, hagamos 2 observaciones:

- i) si no hubiese fuerzas externas entonces no importa la intensidad de la interacción, será  $\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{tot} = cte$
- ii) Notemos que  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \frac{d}{dt}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = \frac{d}{dt}(M \vec{R}) = M \frac{d\vec{R}}{dt} = M \vec{v}_{cm}$   
donde  $\vec{R}$  es el vector centro de masas y  $\vec{v}_{cm}$  es lo que llamamos la velocidad del centro de masas.

Este es un ejemplo de ley de conservación. Otros ejemplos son:

- si no hay  $W_{fuerzas\ conserv}$   $\Rightarrow$  la energía mecánica se conserva  $E = cte$
- si las fuerzas son centrales  $\Rightarrow$  el momento angular se conserva  $\vec{L}_o = cte$

