

Simultaneidad y las mediciones de longitudes

Habiendo precisado como asignar coordenadas espacio-temporales a los eventos, las definiciones de posición, velocidad y aceleración para un observador se aplican sin modificaciones respecto a su versión Newtoniana.

Ahora abordemos el proceso de medición de longitudes de un objeto.

Medición de longitud: La longitud de un objeto es la separación espacial entre dos eventos que ocurren en un mismo instante de tiempo según un observador.

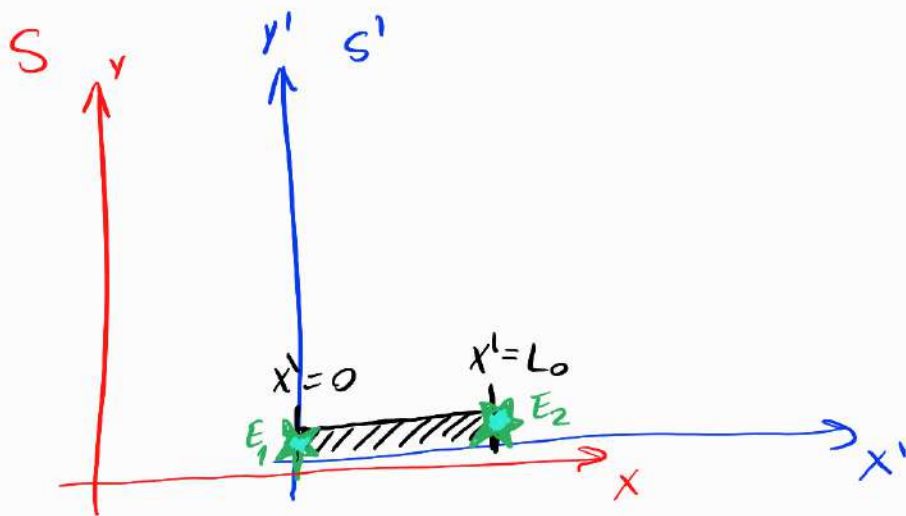
Es claro que, según esta definición la longitud de un objeto no es independiente del observador que la mire.

Supongamos una barra de longitud L_0 cuando es medida en su propio referencial S' . Si la barra se mueve a velocidad v a lo largo de su eje, digamos que esta es la dirección x' , respecto a un referencial S , entonces al ser medida desde

S su longitud estará dada por los eventos E_1 y E_2 con coordenadas

$$E_1 = (ct_{E_1}, x_{E_1}, 0, 0) = (ct_{E_2}, x_{E_2}, 0, 0)$$

$$E_2 = (ct_{E_2}, x_{E_2}, 0, 0) = (ct_{E_1}, x_{E_1}, 0, 0)$$



$$ct_{E_2} = \gamma(v) \left(ct'_{E_2} + \frac{v}{c} x'_{E_2} \right) = \gamma(v) \left(ct'_{E_1} + \frac{v}{c} x'_{E_1} \right) = ct_{E_1}$$

$$\Rightarrow ct'_{E_2} - ct'_{E_1} = -\frac{v}{c} (x'_{E_2} - x'_{E_1})$$

$$L = x_{E_2} - x_{E_1} = \gamma(v) \left(x'_{E_2} - x'_{E_1} + \frac{v}{c} (ct'_{E_2} - ct'_{E_1}) \right)$$

$$\left[L = \gamma(v) \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}_{\frac{1}{\gamma(v)^2}} \underbrace{(x'_{E_2} - x'_{E_1})}_{L_0} = \frac{L_0}{\gamma(v)} \right] \text{ Contracción de Lorentz!!}$$

observemos que $ct_{E_1} = ct_{E_2}$ pero $ct'_{E_1} \neq ct'_{E_2}$.

Es decir, los eventos utilizados en S para medir el largo de la barra son simultáneos en S pero no en S' . Debemos abandonar la idea de simultaneidad de eventos como algo universal.

Causalidad y las mediciones de intervalos temporales

Otro aspecto a discutir en este nuevo paradigma es el concepto de causalidad.

Para que dos eventos, arbitrarios, que ocurran en el espacio-tiempo tengan una relación causal entre ellos, no puede ser que su ordenamiento temporal dependa del observador.

En el ejemplo anterior de medición de la longitud de la barra, consideremos un tercer referencial S'' moviéndose a velocidad V respecto de S en sentido opuesto al de S' .

Entonces según S'' es

$$ct''_{E_2} - ct''_{E_1} = \gamma(v) \left(ct_{E_2} - ct_{E_1} + \frac{v}{c} (x_{E_2} - x_{E_1}) \right) = \gamma(v) \frac{v}{c} \frac{L_0}{\gamma(v)} = \frac{v}{c} L_0$$

En resumen es:

$$t_{E_2} - t_{E_1} = 0 \rightarrow \text{Simultáneo}$$

$$t'_{E_2} - t'_{E_1} = -\frac{v}{c} L_0 \rightarrow E_2 \text{ antecede a } E_1$$

$$t''_{E_2} - t''_{E_1} = \frac{v}{c} L_0 \rightarrow E_1 \text{ antecede a } E_2$$

Por esto decimos que E_1 y E_2 no pueden tener una relación causal.

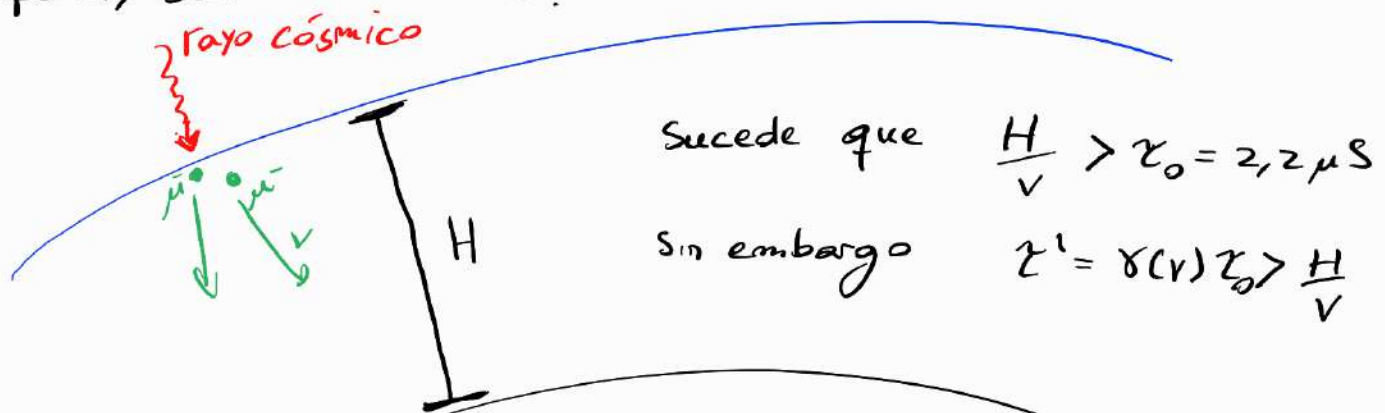
Dilatación temporal - El concepto de dilatación temporal consiste en el fenómeno de que dos eventos que ocurren en un mismo punto del espacio, de acuerdo a cierto referencial S , su separación temporal, vista desde cualquier otro referencial, será mayor. Sean E_1 y E_2 / $E_1 = (ct_{E_1}, x, y, z)$ y $ct_{E_2} - ct_{E_1} = c\tau_0$
 $E_2 = (ct_{E_2}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

$$\Rightarrow ct'_{E_2} - ct'_{E_1} = \gamma(v) (ct_{E_2} - ct_{E_1} - \frac{v}{c}(x_{E_2} - x_{E_1})) = \gamma(v) c\tau_0$$

y como $\gamma(v) \geq 1 \quad \forall v \Rightarrow \left[ct'_{E_2} - ct'_{E_1} = \gamma(v) c\tau_0 \geq ct_{E_2} - ct_{E_1} \right]$
 $(|v| < c)$

Dilatación temporal.

Un ejemplo llamativo de este fenómeno es el de la creación de muones generados por los rayos cósmicos que llegan a la atmósfera. Los muones tienen una vida media de $2,2\mu s$ (en su propio referencial) y por esto no deberían observarse sobre la superficie de la tierra. Sin embargo, debido a la dilatación temporal, son observados!



Sucede que $\frac{H}{v} > \tau_0 = 2,2\mu s$

Sin embargo $\tau' = \gamma(v)\tau_0 > \frac{H}{v}$

Visto desde el referencial de los muones lo que sucede es que el largo de la atmósfera está contraído y es tal que $\tau_0 v > \frac{H}{\gamma(v)}$ (Misma conclusión)

Atención! La dilatación temporal y la contracción de Lorentz NO son dos caras de la misma moneda. Son fenómenos diferentes.

II.2.2 - Geometría del espacio-tiempo

En la visión del espacio Newtoniano, la separación espacial de los eventos es un invariante de Galileo:

$$\Delta S_G^2 = (x_{E_2} - x_{E_1})^2 + (y_{E_2} - y_{E_1})^2 + (z_{E_2} - z_{E_1})^2 = (x'_{E_2} - x'_{E_1})^2 + (y'_{E_2} - y'_{E_1})^2 + (z'_{E_2} - z'_{E_1})^2$$

Sin embargo, en este nuevo paradigma esto ya no es cierto (como ya vimos con los ejemplos). En cambio, existe una nueva cantidad que llamamos intervalo espacio-temporal ΔS^2 el cual es invariante de Lorentz. Definimos ΔS^2 entre dos eventos E_1 y E_2 como:

$$\Delta S^2 \equiv (x_{E_2} - x_{E_1})^2 + (y_{E_2} - y_{E_1})^2 + (z_{E_2} - z_{E_1})^2 - (ct_{E_2} - ct_{E_1})^2 = \Delta r^2 - c^2 \Delta t^2$$

Veamos que ΔS^2 es invariante: **Ejercicio**

$$(x_{E_2} - x_{E_1})^2 + (y_{E_2} - y_{E_1})^2 + (z_{E_2} - z_{E_1})^2 - c^2(t_{E_2} - t_{E_1})^2 = (x'_{E_2} - x'_{E_1})^2 + (y'_{E_2} - y'_{E_1})^2 + (z'_{E_2} - z'_{E_1})^2 - c^2(t'_{E_2} - t'_{E_1})^2$$

Esto quiere decir que si dos eventos son tales que:

$\Delta S^2 > 0 \Rightarrow$ podremos encontrar referenciales con diferente ordenamiento temporal pero nunca uno donde los eventos ocurran en el mismo punto del espacio. Decimos que estos eventos tienen un intervalo tipo ESPACIO.

$\Delta S^2 < 0 \Rightarrow$ podremos encontrar un referencia donde los eventos ocurran en la misma ubicación pero nunca uno donde se altere el orden temporal de los eventos. Decimos que estos eventos tienen un intervalo tipo TIEMPO.

$\Delta S^2 = 0 \Rightarrow$ Decimos que estos eventos tienen un intervalo tipo LUZ.

En el límite de eventos infinitesimalmente cercanos escribimos

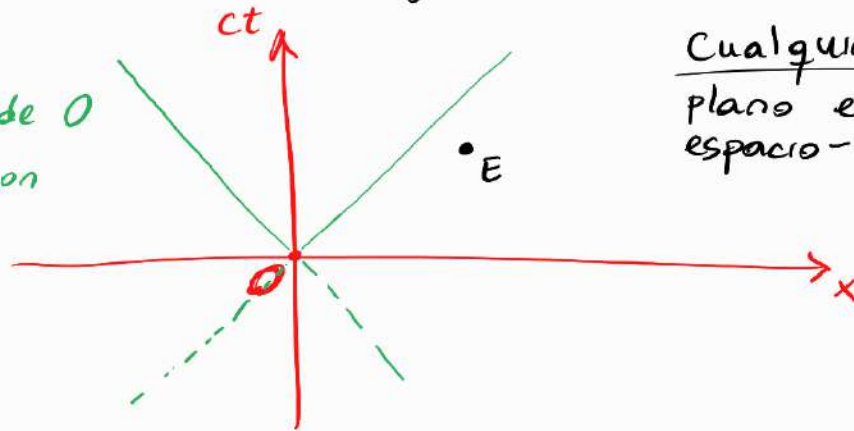
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

Diagramas de Minkowski.

Una forma de visualizar el espacio-tiempo y su geometría es mediante una herramienta práctica para el análisis, o descripción, de los fenómenos relativistas conocida como diagramas de Minkowski. Introducida en 1908 por Hermann-Minkowski.

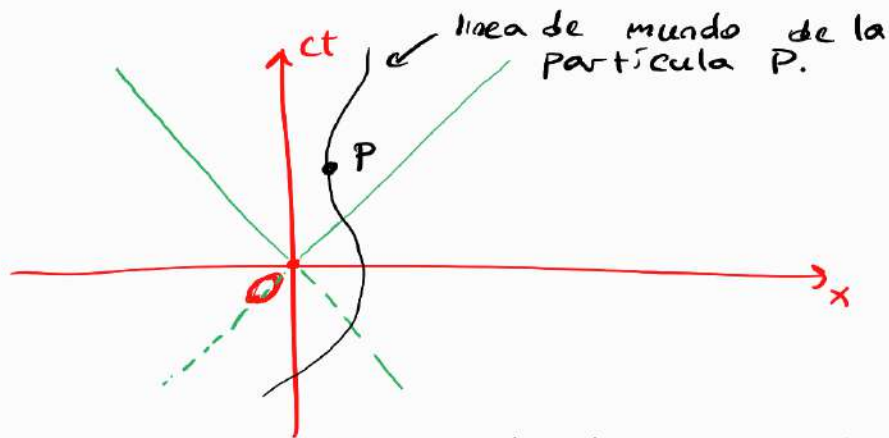
Olvidándonos de las direcciones perpendiculares al movimiento relativo entre dos referenciales, graficamos el espacio-tiempo $ct-x$:

Un rayo/pulso de luz que emerge desde O saldrá inclinado con pendiente 1

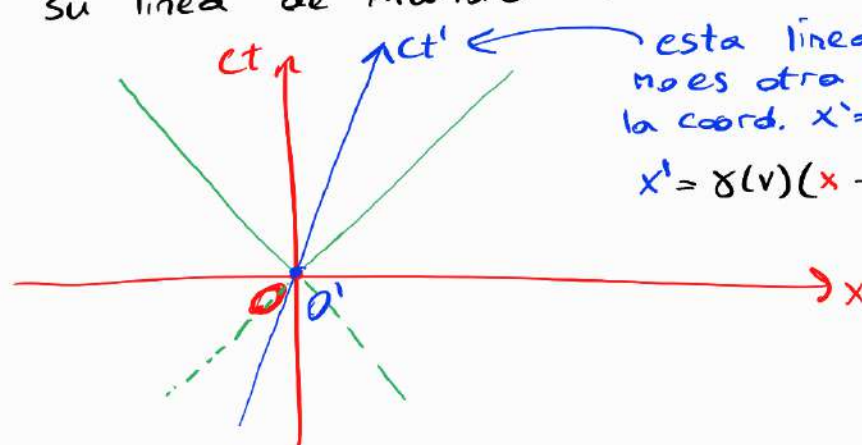


Cualquier punto del plano es un punto del espacio-tiempo.

Una partícula moviéndose en el espacio-tiempo tendrá una LÍNEA de MUNDO (puntos del E-T en los que ocurre su existencia) arbitraria pero siempre con pendiente mayor a 1 (veremos más adelante que $v < c$)



En particular, el referencial S' en este diagrama en particular, el origen espacial, tiene su línea de mundo



esta línea de mundo no es otra cosa que la coord. $x' = 0 \forall t$

$$x' = \gamma(v) \left(x - \frac{v}{c} ct \right) = 0$$

$$\Rightarrow x' = 0$$

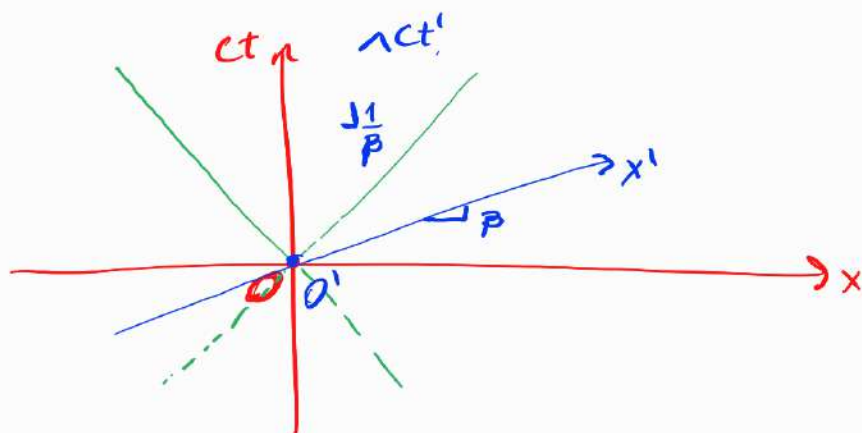
Implica

$$ct = \frac{cx}{v}$$

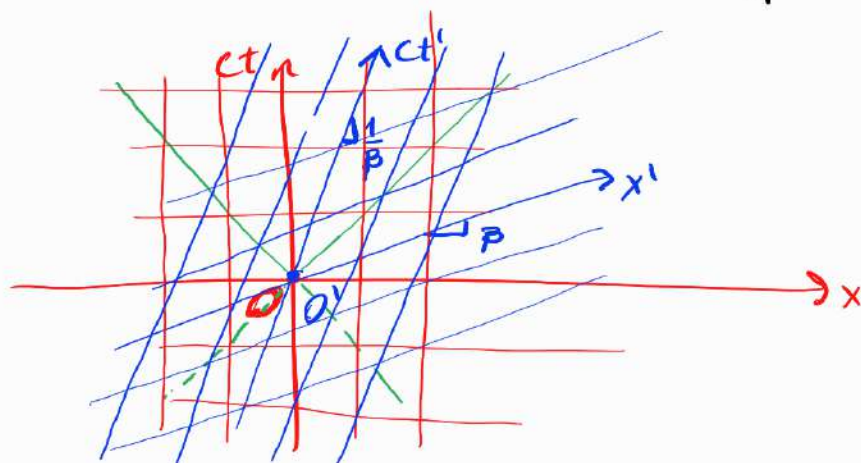
$\times$ pendiente mayor a 1.

De igual forma graficamos los puntos del E-T. con coordenada $ct'=0$; es decir, el eje x' en $t'=0$.

$$ct' = \gamma(v)(ct - \frac{v}{c}x) = 0 \Rightarrow ct'=0 \text{ implica } ct = \frac{v}{c}x$$



Notemos que el "grillado" para uno u otro referencial, es decir las curvas $ct = cte$ y $x = cte$ y $ct' = cte$ y $x' = cte$ son tales que son paralelas a sus respectivos ejes.

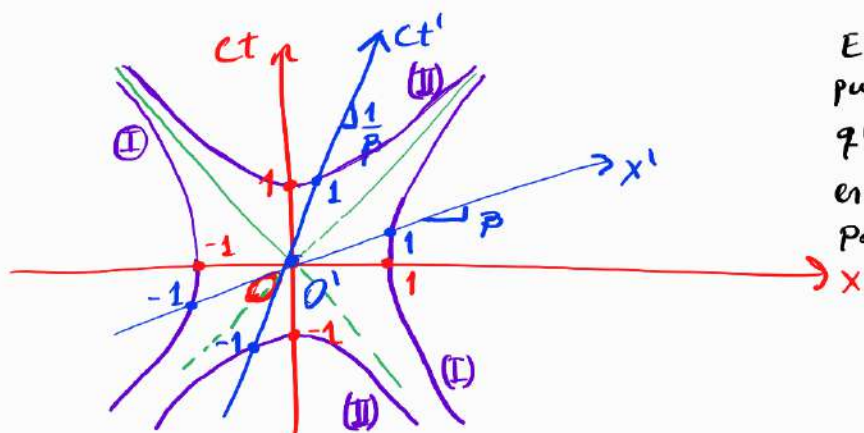


Grafiquemos sobre este diagrama las siguientes curvas:

$$(I) \quad x^2 - (ct)^2 = 1 = x'^2 - (ct')^2$$

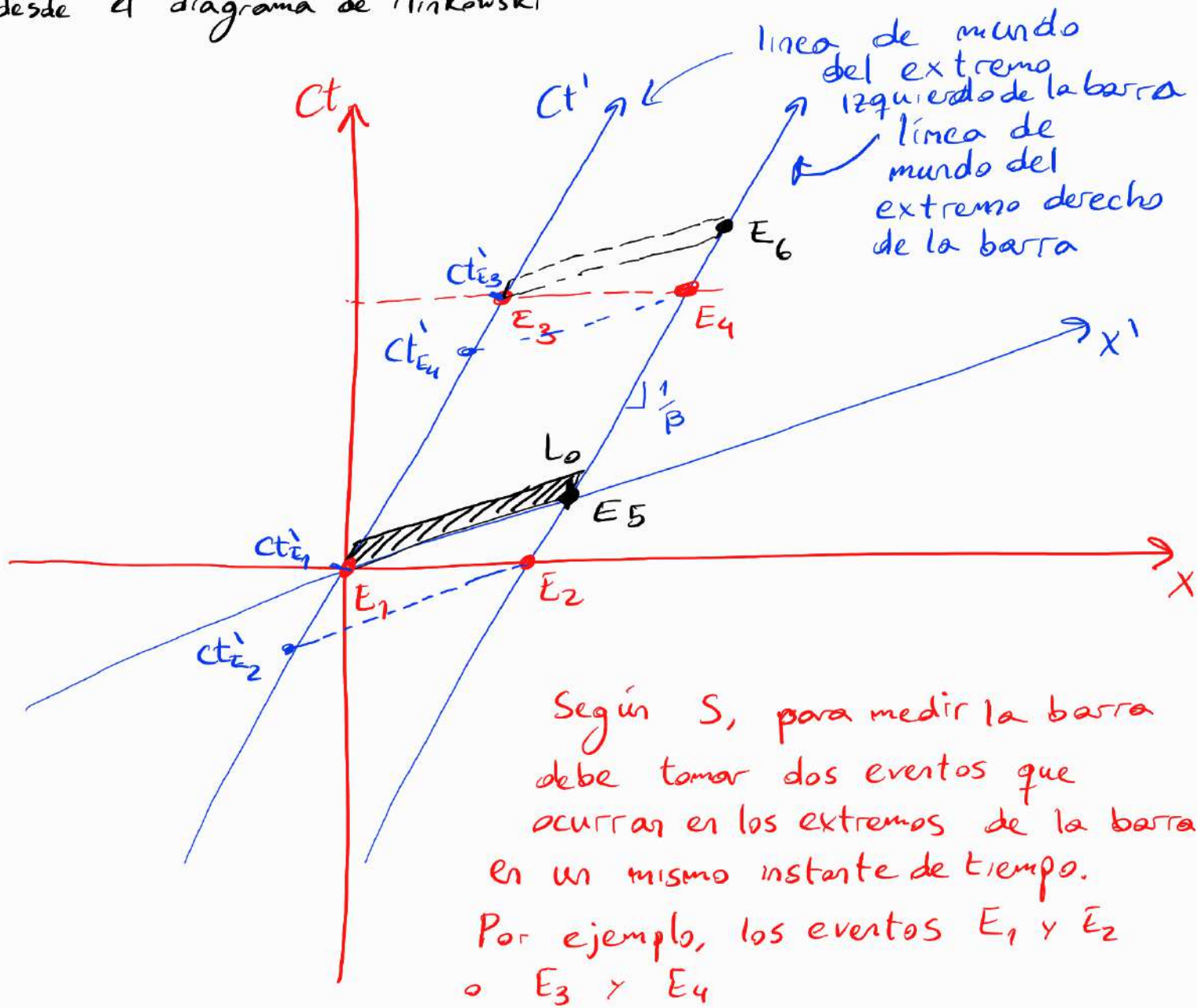
$$(II) \quad x^2 - (ct)^2 = -1 = x'^2 - (ct')^2$$

que llamamos curvas de calibración



Estas curvas representan los puntos del espacio-tiempo que tienen coordenadas ± 1 en x (curvas (I)) y en ct (curvas (II)) para algún referencial.

Veamos el ejemplo de la medición de la longitud de una barra desde el diagrama de Minkowski



El largo de la barra será $x_{E_2} - x_{E_1}$ (o lo mismo $x_{E_4} - x_{E_3}$). Sin embargo, vemos claro que los eventos E_2 y E_1 (o E_4 y E_3) no son simultáneos de acuerdo a S' .

Para medir la barra, apropiadamente, S' debe considerar eventos tales como E_1 y E_5 o E_3 y E_6 .

