Matemática 2 - módulo I
Curso 2022

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen

27 de febrero de 2023

1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Probar que A es invertible.
   b) Hallar A^{-1}.
   c) Hallar valores y vectores propios de A.

2. Se utiliza el modelo de Leslie para estudiar una población de bacterias que tienen una vida media de tres días dividiéndola en tres clases etarias (neonatas, jóvenes, y adultas). Las neonatas no tienen hijas, las jóvenes tienen 4 hijas por día y las adultas 1 hija cada día. Se estima que la esperanza de sobrevivencia de las jóvenes es tres veces mayor que el de las neonatas (es decir, $b_2 = 3b_1$).

   a) Plantear la matriz de Leslie correspondiente al modelo utilizando todos los datos dados.
   b) Si se sabe que en determinado momento había 100 neonatas, 40 jóvenes y 30 adultas, y un día después hay 50 jóvenes, ¿cuál sería el valor de b_1 en este caso?
   c) Determinar cuál tendría que ser el valor de b_1 para que la población tienda a estabilizarse en el largo plazo.

Mat 2 / módulo 1 Examen 27 de Febrero de 2023

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\det(A) = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(9-1) - 1(3-1) + 1(1-3)$

$= 3.8 - 1(2) + 1(-2)$

$= 24 - 2 - 2 = 20 \neq 0.$

Como $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ invertible.

b) $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) Polinomio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \det\begin{pmatrix} (3-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (3-\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & (3-\lambda) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P(\lambda) = (3-\lambda)\begin{vmatrix} (3-\lambda) & 1 \\ 1 & (3-\lambda) \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & (3-\lambda) \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & (3-\lambda) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (3-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 1\right) - 1(3-\lambda-1) + 1(1-(3-\lambda))$

$= (3-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1) - 1(2-\lambda) + 1(-2+\lambda)$

$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) + 2\lambda - 4$

$= 3\lambda^2 - 18\lambda + 24 - \lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda + 2\lambda - 4$

$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$ ($\rightarrow$ raiz evidente $\lambda = 2$)

$= (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 7\lambda - 10)$

$= -(\lambda-2)^2(\lambda-5) \longrightarrow$ valores propios: $\lambda = 2$, $\lambda = 5$.

• Vector propio asociado a $\lambda = 5$: Resolvemos $A.v = 5.v$ (equiv. $(A - 5Id)v = 0$)

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sii $\begin{cases} -2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \end{cases}$

Observar que $v = (1,1,1)$ es solución. Por lo que es un vector propio asoc. a 5.

Como esta matriz tiene det $\neq 0$, todas las soluc. son de la forma $\alpha(1,1,1)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Vectores propios asoc. a $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sii} \quad \begin{cases} v_1+v_2+v_3=0 \\ v_1+v_2+v_3=0 \\ v_1+v_2+v_3=0 \end{cases} \quad \text{sii} \quad v_3=-(v_1+v_2).$$

Las soluciones al sistema son de la forma $(v_1, v_2, -v_1-v_2) = (v_1, 0, -v_1) + (0, v_2, -v_2)$
$= v_1(1,0,-1) + v_2(0,1,-1)$

donde v_1 y v_2 son parámetros reales.

Todas estas soluciones (quitando la solución nula) son vect. propios asoc. a $\lambda=2$.

$\boxed{\text{Mat 2 / módulo 1}}$ Examen 27 de Febrero de 2023

(2) a) $L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 3b_1 & 0 \end{pmatrix}$ donde $b_1 \in [0, 1/3]$ (pues $b_i \in [0,1]$)

b) Ojo: aquí ya no vale $b_2 = 3b_1$, aunque de todas formas esta condición no interfiere con el ejercicio.

Si $L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \to \text{neonatas} \\ \to \text{jóvenes} \\ \to \text{adultas} \end{matrix}$ es la población en det. momento,

$L \cdot X$ representa la evolución en un día. Entonces

$$L \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \cdot (40) + 30 \\ b_1 \cdot (100) \\ b_2 \, (40) \end{pmatrix}.$$

Por letra sabemos $b_1 \cdot (100) = 50$, que implica $\boxed{b_1 = 1/2}$

c) El valor propio dominante es el único valor propio positivo de L.

$$P(\lambda) = \det(L - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 4 & 1 \\ b_1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 3b_1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 3b_1 & -\lambda \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3b_1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2) - b_1(-4\lambda - 3b_1)$$

$$= -\lambda^3 + 4b_1\lambda + 3b_1^2$$

Para que la población se estabilice, necesitamos que el vap. domin. sea $\lambda = 1$.
Esto ocurre si y solo si $P(1) = -1 + 4b_1 + 3b_1^2 = 0$

(sii) $3b_1^2 + 4b_1 - 1 = 0$

(sii) $b_1 = \frac{-8}{6}$ o $b_1 = \frac{2}{6}$.

Recordando que $b_1 \geq 0$, necesariamente

$$\boxed{b_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$