Conjuntos, funciones, relaciones

Notas para el curso de Matemática Discreta 2023, dictado por
Mariana Haim y Santiago Robaina.
(Extraído y adaptado de las notas del curso 2020 redactadas por
Emiliano Sequeira)

Centro de Matemática.
Facultad de Ciencias - UdelaR

Índice general

0.1. Conjuntos

La teoría de conjuntos es una teoría axiomática, es decir que parte de conceptos primitivos (en este caso el de *conjunto* y el de *pertenencia*) que están regidos por una lista de sentencias (axiomas) a partir de las cuales se prueban todos los teoremas. En esta parte del curso trabajaremos de manera un poco informal y no especificaremos los axiomas de la teoría. Así por ejemplo mostraremos construcciones de ciertos conjuntos sin justificar por qué estos están bien definidos dentro de la teoría.

0.1.1. Primeras definiciones

El concepto de **conjunto** representa la idea intuitiva de una colección de objetos que poseen una propiedad en común. A estos objetos los llamaremos **elementos**. Escribiremos $x \in X$ para indicar que x pertenece a X.

Un conjunto queda determinado por sus elementos, es decir que si A y B son dos conjuntos, entonces $A = B$ si y solo si A y B tienen los mismos elementos. Esto nos dice que en principio para definir un conjunto debemos decir cuáles son sus elementos. Podemos por ejemplo hacer esto enumerándolos explícitamente o identificarlos mediante una propiedad determinada. En el primer caso decimos que estamos definiendo el conjunto por **extensión** mientras que en el segundo lo estamos definiendo por **comprensión**.

Ejemplos 0.1.1. Definimos el mismo conjunto A por:

- extensión: $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$,
- comprensión: A es el conjunto de todas las vocales del alfabeto latino.

Otro ejemplo es el siguiente:

- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, o
- $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par y } n < 10\}$.

Decimos que un conjunto A está **contenido** o **incluido** en otro conjunto B si todos los elementos de A son elementos de B. También podemos decir en este caso que A es un **subconjunto** de B o que B **contiene** a A y lo escribimos $A \subseteq B$. Observar que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ implica que $A = B$. Como ejemplo de inclusiones podemos mirar los conjuntos de números:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

También escribiremos $A \not\subseteq B$ para indicar que A no está incluido en B, y $A \subsetneq B$ para indicar que A está incluido en B pero estos conjuntos no son iguales. El **conjunto vacío** se notará por $\emptyset$. Este es el conjunto que no tiene elementos. Observar que si X es cualquier conjunto, entonces $\emptyset \subseteq X$.

0.1.2. Unión de conjuntos

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Observar que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$. Más aún, $A \cup B$ es el menor conjunto que contiene a ambos, es decir que si otro conjunto C contiene a A y a B, entonces $A \cup B \subseteq C$.

Proposición 0.1.2. *La unión de conjuntos es asociativa. Es decir que si A, B y C son tres conjuntos, entonces*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Demostración. Para esto simplemente observamos que $x \in A \cup (B \cup C)$ si y sólo si se da alguna de las siguientes condiciones: (1) $x \in A$, (2) $x \in B$, (3) $x \in C$.
De la misma forma se observa que $x \in (A \cup B) \cup C$ si y sólo si se cumple alguna de las condiciones (1), (2) o (3). □

La Proposición 0.1.2 permite dar una definición para la unión de tres conjuntos.

Consideremos ahora una colección de conjuntos $\mathcal{C}$. Definimos la unión de $\mathcal{C}$ por

$$\bigcup \mathcal{C} := \{x : x \in C \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}.$$

Observar que si $\mathcal{C} = \{A, B\}$, entonces

$$\bigcup \mathcal{C} = A \cup B.$$

Si tomamos $C = \{A_1, \ldots, A_n\}$ escribimos

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup \mathcal{C}.$$

Si $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ es una familia de conjuntos, una notación usual para $\bigcup \mathcal{A}$ es

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Es decir,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

Ejemplo 0.1.3. Para cada número primo $p \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $A_p = \{pn : n \in \mathbb{N}\}$. Notamos por $\mathcal{P}$ al conjunto de números primos, luego

$$\bigcup_{p \in \mathcal{P}} A_p = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

(el conjunto que contiene a todos los números naturales excepto el 1).

0.1.3. Intersección y resta de conjuntos

Si A y B son conjuntos, definimos:

- su **intersección**: $A \cap B := \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$,

- y su **resta**: $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$.

Diremos que A y B son **disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$. Observar que la intersección (al igual que la unión) es conmutativa, es decir que $A \cap B = B \cap A$; sin embargo, la resta no lo es.

Ejemplo 0.1.4. Consideramos $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$. Luego

$$A \cap B = \{6n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, \cdots\}$$

(el conjunto de los pares que no son múltiplos de 3)

En general, si $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos, su intersección se define por

$$\bigcap \mathcal{C} := \{x : x \in C \ \forall C \in \mathcal{C}\}.$$

Si $\mathcal{C}$ está indexada ($\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$), entonces también escribimos

$$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Por ejemplo si consideramos los conjuntos A_p como en el Ejemplo 0.1.3, tenemos

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} A_p = \{0\}.$$

Si $A \subseteq X$, entonces definimos el **complemento** de A en X como el conjunto $A^c = X \setminus A$. Observar que en la notación A^c no se explicita el conjunto X. Cuando se habla de complemento, el conjunto X se piensa como el *universo* en el que están contenidos los conjuntos y se deduce del contexto. Si esto no es así, entonces es mejor mantener la notación $X \setminus A$ que explicita el conjunto X.

Ejercicio 0.1.5. Probar, para A, B subconjuntos de X:

1. $A \setminus B = A \cap B^c$.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $B^c \subseteq A^c$ (en ambos casos el *universo* implícito es X).

0.1.4. Producto cartesiano

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B se define como

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, \ b \in B\},$$

donde (a, b) es el par ordenado de los elementos a y b. Observar que, al tratarse de pares ordenados, el producto cartesiano no es conmutativo.

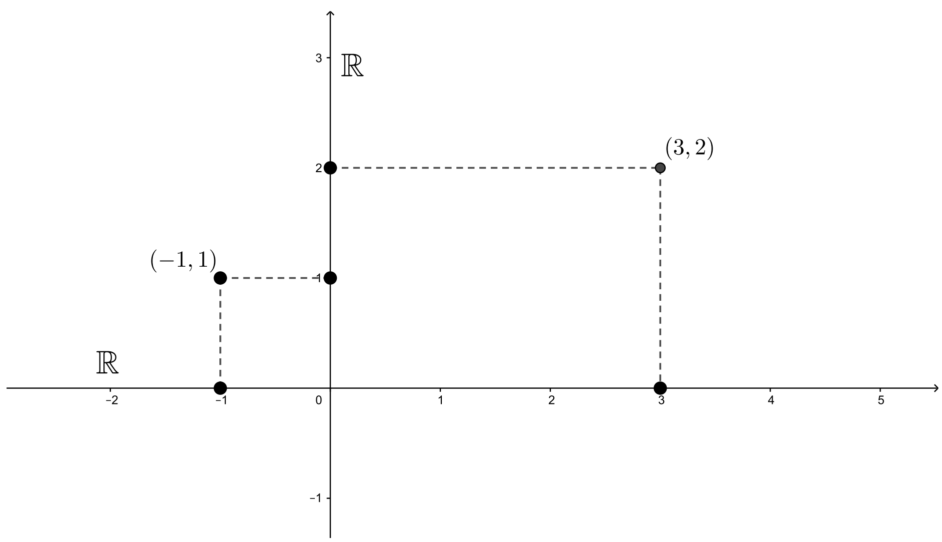
Ejemplos 0.1.6. 1. Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$, entonces $A \times B = \emptyset$.

2. Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{6, 7, 8\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 6), (2, 7), (2, 8)\}.$$

. Determinar $B \times A$.

3. El producto cartesiano de la recta real $\mathbb{R}$ con si misma es el plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De esta manera los puntos del plano quedan determinados por sus dos coordenadas reales.



0.1.5. Conjunto de partes

El **conjunto de partes** o **conjunto potencia** de un conjunto A es

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

es decir, el conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

Ejemplos 0.1.7. 1. El conjunto de partes de $A = \{1, 2\}$ es

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

2. El conjunto de partes del conjunto vacío es

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

0.2. Funciones

Fijemos dos conjuntos A y B.
Se llama **relación** de A en B a cualquier subconjunto de $A \times B$.

Una **función** de A en B es una relación $f \subset A \times B$ que cumple que para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. En este caso llamamos **dominio** de f al conjunto A y **codominio** de f al conjunto B.

Escribimos $f : A \to B$ para indicar que f es una función de A en B, y notamos B^A al conjunto de todas las funciones de A en B.

Ejemplos 0.2.1. 1. La única función posible $f : \emptyset \to B$ es la función vacía.

2. Sea X cualquier conjunto. Definimos la función **identidad** en X por
$$id_X : X \to X,\ id_X(x) = x \ \ \forall x \in X.$$

3. Si $A \subset B$ definimos la función **inclusión** por
$$i : A \to B,\ i(a) = a \forall \ \ a \in A.$$
Si $A = B$, entonces i no es otra cosa que la identidad.

4. Tomemos $b_0 \in B$. La función constante b_0 es
$$f : A \to B,\ f(a) = b_0 \ \ \forall a \in A.$$

5. Si $f : X \to Y$ es una función y $A \subset X$, llamamos **restricción de** f al subconjunto A, a la función $f_{|_A} : A \to Y$ definida por $f_{|_A}(x) = f(x)$.

0.2.1. Conjunto de imágenes y preimágenes

Tomemos $f : A \to B$ una función. Si $f(a) = b$ decimos que b es la **imagen** de a por f y que a es una **preimagen** de b por f. Además, si $X \subseteq A, Y \subseteq B$, decimos que

- el conjunto **imagen** de X por f es $f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset B$.
- el conjunto **preimagen** de Y por f es $f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}$.

También diremos que la **imagen** o el **recorrido** de la función f es el conjunto $f(A)$.

Ejercicio 0.2.2. Consideremos una función $f : X \to Y$ y dos familias de subconjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_i\}_{i \in I}$ con $A_i \subset X$ y $B_i \subset Y$ para todo $i \in I$, se tiene

1. $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.
2. $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$. ¿Se da la igualdad en general?
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

0.2.2. Inyectividad y sobreyectividad

Decimos que una función $f : X \to Y$ es **inyectiva** si $f(x) = f(x')$ se da sólo si $x = x'$.

Ejemplos 0.2.3. 1. La inclusión $i : A \to B$ (si $A \subset B$) es siempre inyectiva. También lo es la identidad.

2. Una función constante $f : A \to B$ no es inyectiva, salvo que A sea un conjunto unitario.

3. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, es inyectiva.

4. La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$, no es inyectiva pues $f(-1) = f(1)$.

Decimos que $f : X \to Y$ es **sobreyectiva** si $f(X) = Y$, es decir, si su imagen coincide con su codominio.

Ejemplos 0.2.4. 1. La inclusión de A en B no es sobreyectiva salvo que A sea igual a B. En ese caso la función es la identidad.

2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$, es sobreyectiva.

Ejercicio 0.2.5. Consideremos una función $f : X \to Y$ y dos conjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar:

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$ y la igualdad se da si y sólo si f es inyectiva.
2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y la igualdad se da si y sólo si f es sobreyectiva.

Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

0.2.3. Composición y función inversa

Consideremos dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, su **composición** es la función $g \circ f : X \to Z$, definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ \forall x \in X.$$

Proposición 0.2.6. *1. La composición de funciones es asociativa.*

2. La composición de funciones no es conmutativa.

3. Dada $f : A \to B$, se tiene $f \circ id_A = f$ y $id_B \circ f = f$.

Demostración. Se hizo en clase y queda como ejercicio para el lector (ver Ejercicio 5 del Repartido 2). □

En el caso $X = Z$ decimos que g es **inversa** de f si $g \circ f = id_X : X \to X$ y $f \circ g = id_Y : Y \to X$. Si f tiene una inversa diremos que es **invertible**.

Proposición 0.2.7. *Si una función f tiene inversa, entonces esta es única y se nota f^{-1}.*

Demostración. Supongamos que g y h son dos inversas de f, queremos ver que para todo $y \in Y$, $g(y) = h(y)$. Como f es biyectiva podemos tomar x tal $f(x) = y$, luego

$$g(y) = g(f(x)) = x = h(f(x)) = h(y).$$

$\square$

La siguiente proposición da una caracterización de las funciones biyectivas. Antes de demostrarla, presentamos un resultado previo e importante.

Lema 0.2.8. *Sean $f : X \to Y, g : Y \to Z$ funciones.*

1. *Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.*

2. *Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.*

Demostración.

1. Supongamos que a, a' son elementos de A tales que $f(a) = f(a')$. Queremos ver que $a = a'$.
   Aplicando g a la igualdad de arriba, se tiene

   $$g(f(a)) = g(f(a')),$$

   que equivale a $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. hora bien, como $g \circ f$ es inyectiva, se deduce $a = a'$.

2. Sea $A \in A$, buscamos $b \in A$ tal que $g(b) = a$. Como $g \circ f : A \to A$ es sobreyectiva, existe $a' \in A$ tal que $(g \circ f)(a') = a$. Entonces $g(f(a')) = a$ y obtenemos que $f(a')$ es un elemento como el b que buscábamos.

$\square$

Proposición 0.2.9. *Una función es invertible si y sólo si es biyectiva.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que g es una inversa de f. Veamos primero que f es inyectiva. Como $g \circ f = id_A$ y id_A es inyectiva, se deduce de la primera parte del Lema anterior, que f es inyectiva.
Por otra parte, como $f \circ g = id_B$ y id_B es sobreyectiva, se deduce de la segunda parte del Lema anterior, que f es sobreyectiva.
($\Rightarrow$) Ahora supongamos que f es biyectiva y definamos su inversa g de la siguiente manera: para $y \in Y$ sabemos que existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Ponemos entonces $g(y) = x$. Es directo ver que g es la inversa de f. $\square$

0.3. Relaciones

Como se vio en la sección anterior, una relación de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Allí estudiamos una clase especial de relaciones: las funciones. En este capítulo trataremos relaciones que tiene la particularidad de estar contenidas en productos de la forma $X \times X$. Una relación $\mathcal{R}$ de esta forma será llamada simplemente **relación en** X y escribiremos $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$. Diremos también que $\mathcal{R}$ es

- **reflexiva** si $x\mathcal{R}x$ para todo $x \in X$.
- **irreflexiva** si $x \not\mathcal{R} x$ para todo $x \in X$
- **simétrica** si para todos $x, y \in X$ $x\mathcal{R}y$ implica $y\mathcal{R}x$.
- **asimétrica** si para todos $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y$ implica que no se cumple $y\mathcal{R}x$.
- **transitiva** si para todos $x, y, x \in X$, $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$ implica $x\mathcal{R}z$.

Ejemplo 0.3.1. Consideremos el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones

- $\mathcal{R}_1 = \emptyset$.
- $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- $\mathcal{R}_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$
- $\mathcal{R}_4 = X \times X$.

Observamos que sólo $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_4$ son reflexivas, sólo $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_4$ son simétricas, sólo $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_3$ son asimétricas y que todas salvo $\mathcal{R}_3$ son transitivas.

0.3.1. Relaciones de equivalencia

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto X es una **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva. Generalmente se usará para las relaciones de equivalencia la notación: $\sim$, $\approx$, $\simeq$, $\cong$, $\equiv$ o $\asymp$.

Ejemplo 0.3.2 (Congruencia módulo n)**.** Fijemos $n \in \mathbb{Z}$ y consideremos en $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_n$, definida por

$$a \equiv_n b \Leftrightarrow a - b \text{ es múltiplo de } n.$$

Aquí la noción de *múltiplo* puede definirse de la misma forma que para los números naturales a partir de la división entera. Veamos que se trata de una relación de equivalencia:

- Es reflexiva: $a - a = 0$ es múltiplo de n para todo $a \in \mathbb{Z}$, es decir que $a \equiv_n a$ para todo a.
- Es simétrica: si $a \equiv_n b$, entonces $a - b = kn$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Luego $b - a = -kn$, lo que quiere decir que $b \equiv_n a$.
- Supongamos que $a \equiv_n b$ y $b \equiv_n c$. Esto implica que existen k y h tales que $a - b = kn$ y $b - c = hn$, luego

  $$a - c = a - b + b - c = kn + hn = (k + h)n.$$

  Por lo tanto $a \equiv_n c$.

Clases de equivalencia y conjunto cociente

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X, definimos la **clase de equivalencia** de un elemento $x \in X$ como el subconjunto de todos los elementos de X que se relacionan con x, es decir,

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\} \subset X.$$

Por ejemplo, para la congruencia módulo 3 (Ejemplo 0.3.2) podemos mirar la clase del cero:

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : n - 0 \text{ es múltiplo de } 3\} = \{3m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Este es el conjunto de todos los números enteros que son múltiplos de 3. En este caso la clase del 0 para la congruencia módulo n es siempre el conjunto de los múltiplos de n. Observemos que en general la transitividad de la relación de equivalencia implica que si $x \sim y$, entonces $[x] = [y]$.
Definimos el **conjunto cociente** de una relación $\sim$ en X como el conjunto de todas las clases de equivalencia, esto es

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Volvamos al ejemplo de la congruencia módulo 3. Para hallar el cociente de esta relación debemos determinar cuáles son todas sus clases de equivalencia. Ya sabemos que la clase del cero es el conjunto de todos los múltiplos de 3. Observamos que además

- $[1] = \{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$, y
- $[2] = \{3n + 2 : n \in \mathbb{Z}\}$

son otras dos clases diferentes. Se tiene además que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces al dividir n entre 3 obtenermos $n = 3q + r$ con $0 \leq r < 3$. Luego n está en alguna de las clases anteriormente mencionadas. En conclusión

$$\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{[0], [1], [2]\}.$$

Ejercicio 0.3.3. Probar que en general el cociente $\mathbb{Z}/\equiv_n$ tiene n elementos.

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X definimos la **proyección al cociente** como la función

$$\pi : X \to X/\sim,\ \pi(x) = [x].$$

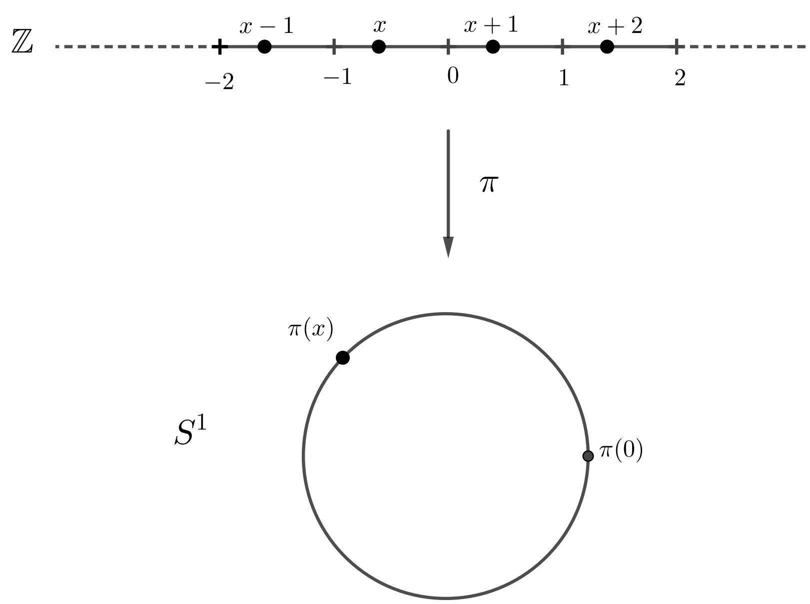
Ejemplo 0.3.4. Ponemos en $\mathbb{R}$ la siguiente relación:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Se deja como ejercicio probar que $\sim$ es una relación de equivalencia. El conjunto cociente de esta relación puede verse geométricamente como el círculo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Observar que de esta forma la proyección queda $\pi : \mathbb{Z} \to S^1,\ \pi(x) = e^{2\pi i x}$.



0.3.2. Particiones

Una **partición** de un conjunto X es una familia P de subconjuntos de X que verifica las siguientes condiciones:

1. Cada elemento de P es no vacío.

2. Dos elementos diferentes de P son disjuntos (se dice también que los elementos de P son disjuntos dos a dos).

3. La unión de los elementos de P es todo X, es decir $\bigcup P = X$.

Ejemplos 0.3.5. 1. Si X es cualquier conjunto, entonces $\{\{x\} : x \in X\}$ es una partición de X; también lo es X. Diremos que estas son las particiones **triviales** de X.

2. Consideremos $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Luego si ponemos

$$A = \{1\},\ B = \{2, 5\},\ C = \{3, 4, 6\} \text{ y } D = \{1, 6\},$$

tenemos por ejemplo que $P_1 = \{A, B, C\}$ es una partición pero $P_2 = \{B, D\}$ y $P_3 = \{B, C, D\}$ no lo son.

El siguiente resultado muestra que las relaciones de equivalencia en X y las particiones de X son en definitiva puntos de vista distintos para un mismo concepto.

Proposición 0.3.6. *1. Si $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto X, entonces el cociente $X/\sim$ es una partición en X.*

2. Sea P una partición en un conjunto X. Entonces existe una única relación de equivalencia $\sim$ en X tal que $X/\sim = P$.

Demostración. Para probar la primera parte debemos ver primero que las clases de equivalencia de la relación $\sim$ son disjuntas dos a dos. Supongamos entonces que tenemos dos clases diferentes $[x]$ e $[y]$ que no son disjuntas. Esto quiere decir que existe z en la intersección de ambas, o dicho de otro modo $z \sim x$ y $y \sim z$. La transitividad de $\sim$ implica que $x \sim y$ y luego $[x] = [y]$. Por otro lado es claro que todo elemento $x \in X$ pertenece a una clase de equivalencia, luego la unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto X.
Para la segunda parte alcanza con definir $\sim$ de la siguiente forma:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists A \in P \text{ tal que } x, y \in A.$$

No es dificil verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Para probar la unicidad, supongamos que $\sim$ y $\equiv$ son dos relaciones de equivalencia tal que $X/\sim\, = X/\equiv\, = P$. Probemos que $x \sim y$ si y sólo si $x \equiv y$:

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertenecen a la misma clase de equivalencia para } \sim \\ &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertenecen a la misma clase de equivalencia para } \equiv \\ &\Leftrightarrow x \equiv y. \end{aligned}$$

□