**Matemática 2 - módulo II**
**Curso 2022**

**Universidad de la República**
**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

**Examen**

*27 de febrero de 2023*

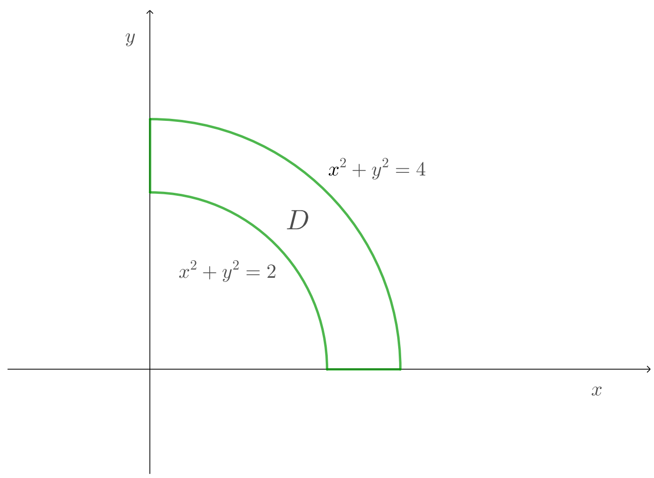
1. Consideremos la función $f(x,y) = x^3 \log(x^2 - 3y^2)$.

   *a*) Determinar el dominio de definición de $f(x,y)$ y dibujarlo.

   *b*) Hallar todos los puntos críticos de $f(x,y)$.

   *c*) Determinar el conjunto de nivel cero de $f$ y hacer un esbozo.

2. Se considera la región del plano del dibujo:




   *a*) Escribir $D$ en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares.

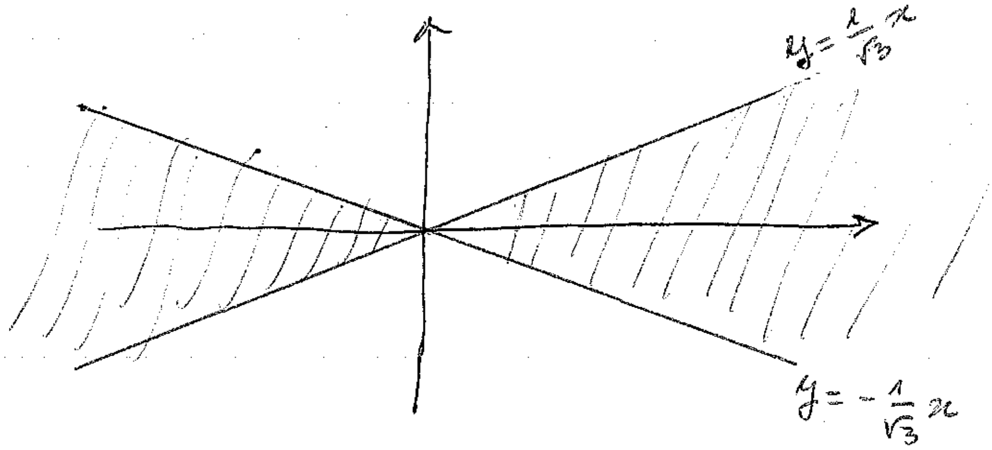
   *b*) Calcular

$$\int_D \frac{y^2}{x^2 + y^2} dxdy.$$

# Solución

1. a) Debe ser $x^2-3y^2>0 \Rightarrow x^2>3y^2 \Rightarrow |x|>\sqrt{3}|y|$

$$\Rightarrow \quad -|x| < \sqrt{3}\,y < |x|$$




b) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\log(x^2-3y^2) + \frac{2x^4}{x^2-3y^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{6x^3y}{x^2-3y^2} = 0$$

En el dominio de $f$ se tiene $x\neq 0$, entonces debe ser $y=0$. Sustituyendo en la primer ecuación

$$2\cdot 3x^2\log(|x|) + \frac{2x^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2\left(3\log(|x|)+1\right)=0$$

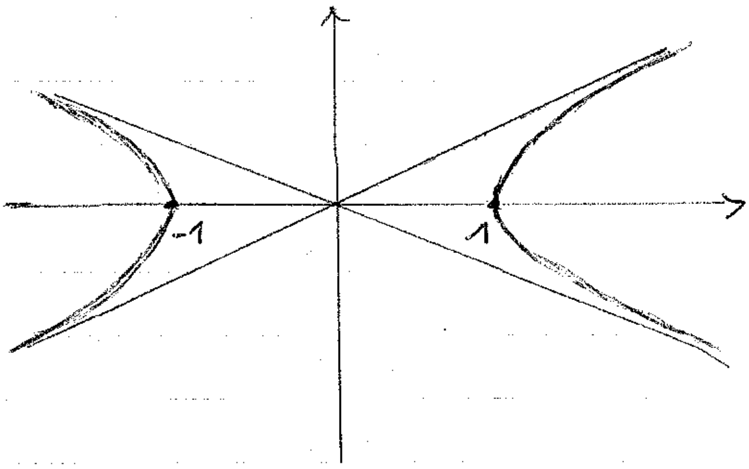
y como $x\neq 0$, debemos tener $\boxed{x=\pm e^{-1/3}}$

Ptos críticos: $(\pm e^{-1/3},0)$.

c) $f(x,y)=0 \iff \log(x^2-3y^2)=0$ ya que $x\neq 0$

$\iff x^2-3y^2=1$.

El conjunto de nivel es una hipérbola asintótica a las rectas $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$:




2. a) Cartesianas: $D=\{(x,y): 2\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le x\}$

Polares: $D=\{(r,\theta): \sqrt{2}\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

b) $$\int_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\cancel{r^2}\operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{r^2}}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{r^2}{2}\Big|_{\sqrt{2}}^{2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\theta\,d\theta=\underbrace{\cancel{-\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\pi/2}}}_{=0}+\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta \Rightarrow \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{4}.$$