Centro de Matemática. Martes 4 de agosto de 2020.

Examen de Probabilidad / Soluciones

Ejercicio 1. Los datos históricos de Noruega indican que un 9% de los hombres son daltónicos, mientras que el porcentaje en las mujeres es del 5 %.

(a) Asumiendo que la proporción de mujeres y hombres es de un $(0.55, 0.45)$ calcular la probabilidad de que un noruegue sea daltónico. Sea p_0 esta probabilidad, D ser daltónico:

$$\mathbf{P}(D) = p_0 = 0.09 \times 0.45 + 0.05 \times 0.55 = 0.068.$$

(b) Dado que una persona es daltónica, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?, ¿y de que sea mujer?. H indica hombre, M mujer, D daltónico.

$$\mathbf{P}(H \mid D) = \frac{\mathbf{P}(D \mid H)\,\mathbf{P}(H)}{\mathbf{P}(D)} = \frac{0.09 \times 0.45}{0.068} = 0.596, \qquad \mathbf{P}(M \mid D) = 1 - 0.596 = 0.404.$$

(c) Se quiere investigar si la proporción total de daltónicos p en la población es menor que p_0 (de la parte (a)). Para eso se elige una muestra aleatoria simple de $n = 100$ personas, y se obtiene un promedio $\bar{X}_{100} = 0.06$. Hacer un test de hipótesis para determinar si es $p < p_0$. La región crítica es

$$\hat{p} \le p_c, \text{ de forma que } \mathbf{P}_{H_0}(\hat{p} \le p_c) = 0.05.$$

Tenemos

$$\mathbf{P}_{H_0}(\hat{p} \le p_c) = \mathbf{P}\left(\frac{n\hat{p} - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \le \frac{np_c - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) \sim \mathbf{P}(\mathcal{N}(0,1) \le \frac{np_c - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}) = 0.05.$$

De allí:

$$\frac{np_c - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = -1.645.$$

$$np_c = 100 \times 0.068 - 1.645\sqrt{100 \times 0.068(1 - 0.068)} = 2.66.$$

Como $np_c = 6$, no rechazamos la hipótesis nula

(d) Se elige un grupo de 3 mujeres y 2 hombres (en forma independiente). Calcular la probabilidad de que haya (estrictamente) mas hombres que mujeres daltónicos.

Las posibilidades son que haya 2 hombres y una o ninguna mujer, 1 hombre y ninguna mujer. Notando p_H y p_M la proporción de hombres y mujeres daltónicos, tenemos

$$\mathbf{P}(\text{mas } H \text{ que } M) = \mathbf{P}(H = 2, M = 0) + \mathbf{P}(H = 2, M = 1) + \mathbf{P}(H = 1, M = 0)$$

$$= \mathbf{P}(H = 2)\,\mathbf{P}(M = 0) + \mathbf{P}(H = 2)\,\mathbf{P}(M = 1) + \mathbf{P}(H = 1)\,\mathbf{P}(M = 0)$$

$$= C_2^2 p_H^2 C_0^3 (1 - p_M)^3 + C_2^2 p_H^2 C_1^3 p_M (1 - p_M)^2 + C_1^2 p_H (1 - p_H) C_0^3 (1 - p_M)^3 = 0.15.$$

(e) Se eligen ahora 500 personas. Calcular la probabilidad aproximada de que haya mas de 30 daltónicas. Usamos el TCL. Sea μ la cantidad de daltónicos entre las 500 personas.

$$\mathbf{P}(\mu > 30) = \mathbf{P}\left(\frac{\mu - 500 \times 0.068}{\sqrt{500 \times 0.068(1 - 0.068)}} > \frac{30 - 500 \times 0.068}{\sqrt{500 \times 0.068(1 - 0.068)}}\right) \sim \mathbf{P}(\mathcal{N} > -0.71) = 0.76.$$

Ejercicio 2. Sean U, V dos variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$.

(a) Calcular la densidad de la variable aleatoria suma $X = U + V$. Integrando mediante la convolución, queda

$$p(x) = \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda t} e^{-\lambda(x-t)} dt = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

(b) Calcular la esperanza y la varianza de X. (Se puede usar la experanza y la varianza de una variable exponencial.) Para U exponencial tenemos

$$\mathbf{E}\, U = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbf{v}\mathrm{ar}\, U = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Entonces

$$\mathbf{E}\, X = \frac{2}{\lambda}, \quad \mathbf{v}\mathrm{ar}\, X = \frac{2}{\lambda^2}.$$

(para la varianza se usa la independencia).

(c) Se considera ahora una muestra aleatoria simple $X_1, \dots, X_n$ cuya densidad es la calculada en la parte (a). Calcular el estimador $\hat{\lambda}$ de máxima verosimilitud de λ. La densidad conjunta es

$$p(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \lambda^{2n} x_1 \dots x_n e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)}$$

Tomamos logaritmo:

$$\log p(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 2n \log \lambda + \log x_1 + \dots + \log x_n - \lambda(x_1 + \dots + x_n).$$

Derivamos con respecto de λ e igualamos a cero, para obtener:

$$\hat{\lambda} = \frac{2n}{x_1 + \dots + x_n}.$$

(d) Demostrar, para el estimador hallado, que

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{2n}\right) = n \times \frac{2}{\lambda}\frac{1}{2n} = \frac{1}{\lambda}.$$

(e) ¿Cómo estimarías la varianza de X? Como

$$\mathbf{v}\mathrm{ar}\, X = \frac{2}{\lambda^2}$$

y tenemos un estimador de λ, una estimación posible sería

$$\widehat{\mathbf{v}\mathrm{ar}\, X} = \frac{2}{\hat{\lambda}^2} = \frac{2}{\hat{\lambda}^2} = 2\frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{4n^2} = \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{2n^2}.$$