Centro de Matemática. Viernes 18 de diciembre de 2020.

Examen de Probabilidad

Ejercicio 1. (a) Un experimento consiste en tirar veinte veces una moneda. Calcular la probabilidad de obtener 20 caras en las 20 tiradas.

(b) Dos amigos discuten sobre cuantas veces hay que repetir ese experimento (el de tirar 20 veces y obtener 20 caras), para obtener un éxito. Llegan a la conclusión de que con $N = 10^6$ experimentos deberían obtener un éxito. Utilizar la aproximación de Poisson para calcular la probabilidad de que, al realizar N veces ese experimento no se obtenga ningún éxito. Para hacer este cálculo es necesario determinar λ, el parámetro de la variable de Poisson.

(c) Consideramos ahora una variables aleatoria X de Poisson con parámetro λ. Calcular la esperanza y la varianza de X.

(d) Enunciar el Teorema Central del Límite para una sucesión de variables aleatorias de Poisson de parámetro λ.

(e) Calcular un intervalo de confianza ahora para los promedios de la suma de 100 variables de Poisson, con el parámetro calculado en la parte (b).

Ejercicio 2. Una variable aleatoria X tiene *distribución de Pareto* de parámetro β cuando su densidad viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^{\beta+1}}, & \text{si } x \geq 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $C > 0$ es una constante a determinar.

(a) Calcular C.

(b) Calcular los momentos de la variable aleatoria X, es decir, las cantidades

$$\alpha_k = \mathbf{E}(X^k),$$

discutiendo su finitud según $k \geq 0$.

(c) Se considera ahora una muestra aleatoria simple $X_1, \dots, X_n$ cuya densidad es la calculada en la parte (a). Calcular el estimador $\hat{\beta}$ de máxima verosimilitud de β.

(d) Demostrar, para el estimador hallado, que

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\right) = \frac{1}{\beta^2}.$$

(e) Suponiendo el caso en que $\mu = \mathbf{E}\, X$ es finito, proponer un estimador de μ.