Centro de Matemática. Viernes 5 de marzo de 2021

Examen de Probabilidad

Ejercicio 1. Una variable aleatoria X tiene *distribución geométrica* si toma valores en $\{1, 2, \dots\}$ con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

donde $0 < p < 1$.

(a) Demostrar que si tenemos una serie de ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito p, y denotamos X el primer éxito, entonces X tiene distribución geométrica.

(b) Calcular la esperanza y la varianza de una variable geométrica con parámetro p.

(c) Se consideran ahora variables independientes e idénticamente distribuidas $X_1, \dots, X_n$, cada una con distribución geométrica, y su suma

$$B = X_1 + \cdots + X_n.$$

Calcular la esperanza y la varianza de B.

(d) Suponiendo ahora que $p = 1/3$ y que $n = 100$ en la parte anterior, calcular utilizando el Teorema Central del Límite una aproximación para

$$\mathbf{P}(B \leq 200)$$

(e) Suponiendo ahora que se observa una muestra aleatoria simple $X_1, \dots, X_n$ de variables geométricas con parámetro p, calcular el estimador de máxima verosimilitud de p.

Ejercicio 2. El vector aleatorio (X, Y) tiene densidad conjunta dada por la función

$$f(x,y) = \begin{cases} ce^{-(x+y)}, & \text{cuando } x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcular la constante $c > 0$.

(b) Calcular la densidad marginal de las variables X e Y.

(c) ¿Son X e Y independientes? Justificar.

(d) Calcular la esperanza y la varianza de $X + Y$.

(e) Calcular la densidad de la variable aleatoria $X + Y$.