Centro de Matemática. Miércoles 27 de julio de 2022

Examen de Probabilidad

Ejercicio 1. Se consideran $T_1, \dots, T_n$ variables aleatorias independientes, con distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$. Se considera

$$S_n = T_1 + \cdots + T_n.$$

(a) Calcular $\mathbf{E}\, S_n$ y $\mathbf{var}\, S_n$.

(b) Se observan en un experimento los valores $t_1, \dots, t_n$ de las variables $T_1, \dots, T_n$. Calcular el estimador de máxima verosimilitud de λ.

(c) Se consideran además las variables aleatorias independientes $B_1, \dots, B_n$ de Bernoulli con probabilidad común p. Se considera

$$S'_n = B_1 T_1 + \cdots + B_n T_n.$$

(las B_i y las T_i también son independientes). Calcular $\mathbf{E}\, S'_n$ y $\mathbf{var}\, S'_n$

Ejercicio 2. Se elige al azar de manera uniforme un número en el intervalo $[0, 1]$. Sea

$$0, X_1 X_2 X_3 \dots$$

el desarrollo decimal del número obtenido.

(a) Determinar los valores k posibles que puede tomar X_1 y calcular, para todos esos valores, la probabilidad

$$\mathbf{P}(X_1 = k)$$

(b) Determinar ahora los valores j posibles que puede tomar X_2 y calcular, para todos esos valores j, la probabilidad

$$\mathbf{P}(X_2 = j)$$

(c) Calcular para k y j como en las partes anteriores

$$\mathbf{P}(X_1 = k, X_2 = j)$$

¿Resultan X_1 y X_2 independientes? Justifique.

(d) Cuanto vale el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Fundamente intuitivamente.