Centro de Matemática. Miércoles 10 de agosto de 2022

Examen de Probabilidad

Ejercicio 1. Sean X, Y variables aleatorias independientes que verifican $\mathbf{E}\,X = 0, \mathbf{E}\,Y = 1$, y $\mathbf{var}\,X = 1$, $\mathbf{var}\,Y = 2$. Sea $Z = X + 2Y$.

(a) Calcular $\mathbf{E}\,Z$ y $\mathbf{var}\,Z$.

(b) A partir de la desigualdad de Chebysev, calcular un intervalo de confianza para Z al nivel 95%, simétrico alrededor de su esperanza.

(c) Se asume ahora que Z tiene, además de la esperanza y la varianza calculada, distribución normal. Calcular el intervalo para Z al mismo nivel 95%, utilizando una de las siguientes igualdades:

$$\texttt{qnorm}(0.95) = 1,65 \qquad \texttt{qnorm}(0.975) = 1,96$$

(d) Calcular la densidad de la variable aleatoria $W = e^Z$

Ejercicio 2. Consideremos una sucesión de ensayos de Bernuolli con probabilidad de éxito $0 < p < 1$ (tan larga como sea necesario). Sea N el número del experimento correspondiente al primer éxito. Recordar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ si $-1 < x < 1$.

(a) Calcular $\mathbf{P}(N = k)$ para $k = 1, 2, \ldots$

(b) Calcular $\mathbf{P}(N > k)$ y demostrar la *propiedad de pérdida de memoria* para N:

$$\mathbf{P}(N > k + h \mid N > h) = \mathbf{P}(N > k)$$

(c) Calcular la probabilidad de que el primer éxito se produzca en un experimento par.

Centro de Matemática. Miércoles 10 de agosto de 2022

SOLUCIONES - Examen de Probabilidad

Ejercicio 1. Sean X, Y variables aleatorias independientes que verifican $\mathbf{E}\,X = 0, \mathbf{E}\,Y = 1$, y $\mathbf{var}\,X = 1$, $\mathbf{var}\,Y = 2$. Sea $Z = X + 2Y$.

(a) Calcular

$$\mathbf{E}\,Z = \mathbf{E}\,X + 2\,\mathbf{E}\,Y = 2.$$
$$\mathbf{var}\,Z = \mathbf{var}\,X + 4\,\mathbf{var}\,Y = 1 + 4 \times 2 = 9.$$

(b) Calcular un intervalo de confianza para Z al nivel 95%, simétrico alrededor de su esperanza. Aplicando Chebishev:

$$\mathbf{P}(|Z - \mathbf{E}\,Z| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{var}\,Z}{\varepsilon^2} = 0,05$$

Resulta $\varepsilon = 13,4$. Como $\mathbf{E}\,Z = 2$, el intervalo es $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) = (-11,4; 15,4)$.

(c) Se asume ahora que Z tiene, además de la esperanza y la varianza calculada, distribución normal. Calcular el intervalo para Z al mismo nivel 95%, utilizando una de las siguientes igualdades:

$$\texttt{qnorm}(0.95) = 1,65 \qquad \texttt{qnorm}(0.975) = 1,96$$

Si Z es normal, el intervalo es

$$\mathbf{P}\left(\frac{|Z - \mathbf{E}\,Z|}{\sigma} \geq \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,05.$$

Resulta $\varepsilon/\sigma = 1,96$, con $\sigma = 3$, $\varepsilon = 5.88$. El intervalo es $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) = (-3,88; 7,88)$.

(d) Calcular la densidad de la variable aleatoria $W = e^Z$. Tenemos, con $\sigma = 3$ y $\mathbf{E}\,Z = 2$

$$\mathbf{P}(e^Z \leq x) = \mathbf{P}(Z \leq \log x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\log x} e^{-\frac{1}{2}(u-3)/9} du$$

Derivando obtenemos la densidad:

$$p_W(x) = \frac{1}{3x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\log x - 3)/9}$$

Ejercicio 2. Consideremos una sucesión de ensayos de Bernuolli con probabilidad de éxito $0 < p < 1$ (tan larga como sea necesario). Sea N el número del experimento correspondiente al primer éxito.

(a) Calcular $\mathbf{P}(N = k)$ para $k = 1, 2, \dots$. Tenemos

$$\mathbf{P}(N = 1) = p, \quad \mathbf{P}(N = 2) = (1 - p)p, \quad \dots \quad \mathbf{P}(N = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

(b) Demostrar la *propiedad de pérdida de memoria* para N. Calculamos primero

$$\mathbf{P}(N > k) = \sum_{\ell=k+1}^{\infty} (1-p)^{\ell-1} p = p(1-p)^k \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k$$

$$\mathbf{P}(N > k+h \mid N \geq h) = \frac{\mathbf{P}(N > k+h \cap N \geq h)}{P(N \geq h)} = \frac{\mathbf{P}(N \geq k+h)}{P(N \geq h)} = \frac{(1-p)^{k+h}}{(1-p)^h} = \mathbf{P}(N > k)$$

(c) Calcular la probabilidad de que el primer éxito se produzca en un experimento par.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N = \text{par}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = 2k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{2k-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k} \\ &= \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}\end{aligned}$$