Centro de Matemática. Viernes 16 de diciembre de 2022

Examen de Probabilidad

Ejercicio 1. Sean X, Y, Z variables aleatorias independientes que verifican

$$\mathbf{E}\, X = \mathbf{E}\, Y = \mathbf{E}\, Z = 1, \qquad \mathbf{var}\, X = 1, \quad \mathbf{var}\, Y = 2, \quad \mathbf{var}\, Z = 3.$$

Sea $T = X + Y - 2Z$.

(a) Calcular $\mathbf{E}\, T$ y $\mathbf{var}\, T$.

(b) A partir de la desigualdad de Chebysev, calcular un intervalo de confianza para T al nivel 95%, simétrico alrededor de su esperanza.

(c) Supongamos ahora que X tiene distribución uniforme en $[0, 2]$. Calcular la densidad de X y verificar que $\mathbf{E}\, X = 1$.

(d) Supongamos ahora que Y tiene densidad exponencial. Escribir la densidad de Y sabiendo que $\mathbf{E}\, Y = 1$.

Ejercicio 2. Consideremos una sucesión de ensayos de Bernuolli con probabilidad de éxito $0 < p < 1$ (tan larga como sea necesario). Sea N el número del experimento correspondiente al primer éxito. Recordar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ si $-1 < x < 1$.

(a) Calcular $\mathbf{P}(N = k)$ para $k = 1, 2, \dots$

(b) Calcular $\mathbf{P}(N > k)$ y demostrar la *propiedad de pérdida de memoria* para N:

$$\mathbf{P}(N > k + h \mid N > h) = \mathbf{P}(N > k)$$

(c) Calcular la probabilidad de que el primer éxito se produzca en un experimento par.

Centro de Matemática. Miércoles 10 de agosto de 2022

SOLUCIONES - Examen de Probabilidad

Ejercicio 1. Sean X, Y, Z variables aleatorias independientes que verifican

$$\mathbf{E}\,X = \mathbf{E}\,Y = \mathbf{E}\,Z = 1, \qquad \mathbf{var}\,X = 1, \quad \mathbf{var}\,Y = 2, \quad \mathbf{var}\,Z = 3.$$

Sea $T = X + Y - 2Z$.

(a) Calcular

$$\mathbf{E}\,T = \mathbf{E}(X + Y - 2Z) = \mathbf{E}\,X + \mathbf{E}\,Y - 2\,\mathbf{E}\,Z = 0.$$

$$\mathbf{var}\,T = \mathbf{var}(X + Y - 2Z) = \mathbf{var}\,X + \mathbf{var}\,Y + 4\,\mathbf{var}\,Z = 1 + 2 + 4 \times 3 = 15.$$

(b) A partir de la desigualdad de Chebysev, calcular un intervalo de confianza para Z al nivel 95%, simétrico alrededor de su esperanza. Aplicando Chebishev:

$$\mathbf{P}(|T - \mathbf{E}\,T| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{var}\,T}{\varepsilon^2} = \frac{15}{\varepsilon^2} = 0{,}05.$$

Resulta $\varepsilon = 17{,}3$. Como $\mathbf{E}\,T = 0$, el intervalo es $(-\varepsilon, \varepsilon) = (-17{,}3; 17{,}3)$.

(c) Supongamos ahora que X tiene distribución uniforme en $[0, 2]$. Calcular la densidad de X y verificar que $\mathbf{E}\,X = 1$. La densidad de X es

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,2]}$$

Tenemos

$$\mathbf{E}\,X = \int_0^2 x\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 1.$$

(d) Si Y tiene densidad exponencial, su densidad es de la forma $f_Y(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ para $x \geq 0$. La esperanza vale $\mathbf{E}\,Y = 1/\alpha = 1$ entonces $\alpha = 1$ y la densidad es $f_Y(x) = e^{-x}$ para $x \geq 0$.

Ejercicio 2. Consideremos una sucesión de ensayos de Bernuolli con probabilidad de éxito $0 < p < 1$ (tan larga como sea necesario). Sea N el número del experimento correspondiente al primer éxito.

(a) Calcular $\mathbf{P}(N = k)$ para $k = 1, 2, \dots$. Tenemos

$$\mathbf{P}(N = 1) = p, \quad \mathbf{P}(N = 2) = (1 - p)p, \quad \dots \quad \mathbf{P}(N = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

(b) Demostrar la *propiedad de pérdida de memoria* para N. Calculamos primero

$$\mathbf{P}(N > k) = \sum_{\ell=k+1}^{\infty}(1 - p)^{\ell-1}p = p(1 - p)^k\frac{1}{1 - (1 - p)} = (1 - p)^k$$

$$\mathbf{P}(N > k+h \mid N \geq h) = \frac{\mathbf{P}(N > k+h \cap N \geq h)}{P(N \geq h)} = \frac{\mathbf{P}(N \geq k+h)}{P(N \geq h)} = \frac{(1-p)^{k+h}}{(1-p)^{h}} = \mathbf{P}(N > k)$$

(c) Calcular la probabilidad de que el primer éxito se produzca en un experimento par.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N = \text{par}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = 2k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{2k-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k} \\ &= \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}\end{aligned}$$