Centro de Matemática. Lunes 6 de Marzo de 2023

Examen de Probabilidad

Ejercicio 1. Sea considera una variable aleatoria X con densidad $f(x)$ y función de distribución $F(x)$. Supongamos que la densidad está acotada por K, es decir $f(x) \leq K$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Demostrar, dado $\varepsilon > 0$, que

$$F(x+\varepsilon) - F(x) \leq K\varepsilon. \tag{1}$$

(b) Sea ahora $X = U + V$ donde U y V son variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$ cada una de ellas. Calcularla densidad de X, verificar que está acotada y determinar la constante K mínima posible.

(c) Calcular la distribución de X.

(d) Verificar si en algún punto x se verifica la igualdad en (1) con $\varepsilon > 0$.

Ejercicio 2. Se tira un dado equilibrado de 6 caras 100 veces.

(a) Dar un valor aproximado de la suma de los resultados obtenidos.

(b) Dar un intervalo de confianza de nivel 95% alrededor del valor aproximado hallado en (a)[1].

(c) Indicar la probabilidad de obtener 16 veces el resultado 6 en los 100 tiros.

(d) Dar una aproximación de esta probabilidad mediante el teorema local de De-Moivre-Laplace

[1]Se puede usar que `qnorm(0.975)=1.96`.

Centro de Matemática. Lunes 6 de Marzo de 2023

SOLUCIONES - Examen de Probabilidad

Ejercicio 1.

$$F(x+\varepsilon)-F(x)=\int_x^{x+\varepsilon} f(x)dx \leq K\int_x^{x+\varepsilon} dx \leq K\varepsilon.$$

(b) X tiene distribución triangular. La densidad de U y de V es $\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. El soporte de la densidad f de X es $[0,2]$. La fórmula de la densidad de la suma es

$$f(x)=\mathbf{P}(U+V\leq x)=\int_0^2 f(y)f(x-y)dy=\begin{cases}0, \text{ si } x\leq 0\\ x, \text{ si } 0\leq x\leq 1\\ 2-x, \text{ si } 1\leq x\leq 2\\ 0, \text{ si } x\geq 2,\end{cases}$$

donde hay que analizar en cada intervalo el valor del integrando e integrar. La mínima cota es $K=1$

(c) La distribución F de X se calcula integrando la densidad:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ si } x\leq 0\\ x^2/2, \text{ si } 0\leq x\leq 1\\ 1-(2-x)^2/2, \text{ si } 1\leq x\leq 2\\ 1, \text{ si } x\geq 2,\end{cases}$$

(d) La igualdad sería $F(x+\varepsilon)-F(x)=\varepsilon$ (porque $K=1$). Pero

$$F(x+\varepsilon)-F(x)=\int_x^{x+\varepsilon} f(x)dx,$$

y como $f(x)<1$ (salvo el punto $x=1$) la igualdad no se verifica.

Ejercicio 2. Se tira un dado equilibrado de 6 caras 100 veces.

(a) Cada dado tiene un valor esperado de 3,5. Si sumamos 100 veces obtenemos 350.

(b) Dar un intervalo de confianza de nivel 95% alrededor del valor aproximado hallado en (a). Suponemos entonces que el resultado es una variable normal con media $\mu=350$ y varianza $\sigma^2=100\sigma_0^2$ donde σ_0^2 es la varianza de tirar una vez el dado. Calculamos, para X el resultado de un dado

$$\mathbf{E}(X^2)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+\cdots+6^2)=\frac{91}{6}.$$

Luego

$$\mathbf{var}(X)=\frac{91}{6}-(3.5)^2=2,92,$$

y la varianza de la suma es 292 Entonces, tomando el valor 1.96 de la distribución normal, el intervalo es

$$350 \pm 1,96\sqrt{292} = (316,5; 383,5).$$

(c) Calcular la probabilidad de 16 veces 6 en los 100 tiros. Si el éxito es el 6 con probabilidad 1/6:

$$\binom{100}{16}\binom{100}{84}\left(\frac{1}{6}\right)^{16}\left(\frac{5}{6}\right)^{84}.$$

(d) Dar una aproximación. Tenemos un esquema de Bernoulli con probabilidad de éxito $p = 1/6$. La fórmula es

$$P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

En este caso $n = 100$, $m = 16$ $p = 1/6$, $q = 5/6$. Tenemos

$$\sqrt{100(1/6)(5/6)} = 3,73, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{16 - 100/6}{3,73} = -0.179.$$

Entonces

$$P_{100}(16) \sim \frac{1}{3,73}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.179^2/2} = 0,11.$$