Práctico 1: Conceptos básicos[1]

Problemas de conteo

1. Tengo que elegir una contraseña. La regla es que la contraseña debe constar de dos letras minúsculas (de la a a la z) seguidas de una letra mayúscula (de la A a la Z) seguida de cuatro dígitos $(0, 1, \ldots, 9)$. Por ejemplo, la siguiente es una contraseña válida:

ejT3018

Calcular: (a) el número total de contraseñas posibles, N; (b) cuántas contraseñas se pueden formar sin repetir ninguna letra ni dígito.

2. Calcular cuántas palabras se pueden armar usando 3 letras A's y 5 letras B's (por ejemplo: AAABBBBB, AABABBBB, etc.)

3. Diez amigos organizan un almuerzo. Cinco de ellos deberán traer algo salado, tres traerán bebidas y dos traerán postre. Calcular de cuántas maneras pueden dividirse en estos tres grupos.

Operaciones con sucesos

4. Un blanco se compone de 5 círculos concéntricos con radios $0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5$. El suceso $\mathbf{A}_k$ consiste en acertar en el círculo de radio r_k. Explicar qué significan los sucesos :

$$\mathbf{B} = \bigcup_{k=1}^{5} \mathbf{A}_k, \ \mathbf{C} = \bigcap_{k=1}^{5} \mathbf{A}_k, \ \mathbf{D} = \mathbf{A}_1^c \cap \mathbf{A}_2.$$

5. Un trabajador fabrica distintos productos. Sea $\mathbf{A}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ el suceso que consiste en que el producto k-ésimo sea defectuoso. Escribir los sucesos: (a) ni uno de los productos es defectuoso; (b) por lo menos uno de los productos es defectuoso; (c) solamente uno de los productos es defectuoso.

6. Se tiran dos dados en forma consecutiva. El suceso $\mathbf{A}$ consiste en que la suma de puntos obtenidos sea par; el suceso $\mathbf{B}$, en que por lo menos en uno de los dados aparezcan 6 puntos. Describa los sucesos $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}^c$, $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})^c$.

[1] *Para trabajar en las semanas 1 y 2.*

Propiedades de la probabilidad

A partir de los axiomas de Kolmogorov, probar las siguientes propiedades:

7. $\mathbf{P}(\mathbf{A}^c) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{A})$ para cualquier suceso $\mathbf{A}$.

8. Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, entonces $\mathbf{P}(\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A})$.

9. Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, entonces $\mathbf{P}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{B})$.

10. $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ para sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios.

11. $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B})$ para sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios.

12. $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \geq \mathbf{P}(\mathbf{A}) - \mathbf{P}(\mathbf{B}^c)$ para sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios.

13. $\mathbf{P}(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ para sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios.

14. *(Teorema de continuidad)* Si $\{\mathbf{A}_n\}_n$ es una *sucesión creciente* de eventos ($\mathbf{A}_1 \subseteq \mathbf{A}_2 \subseteq \mathbf{A}_3 \subseteq \cdots$), entonces existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathbf{A}_n)$. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathbf{A}_n) = \mathbf{P}(\mathbf{A}), \text{ siendo } \mathbf{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n.$$

15. Si $\{\mathbf{C}_n\}_n$ es una *sucesión decreciente* de eventos ($\mathbf{C}_1 \supseteq \mathbf{C}_2 \supseteq \mathbf{C}_3 \supseteq \cdots$), entonces existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathbf{C}_n)$. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathbf{C}_n) = \mathbf{P}(\mathbf{C}), \text{ siendo } \mathbf{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{C}_n.$$

16. $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k^c\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_k)$, para sucesos $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ arbitrarios.

Casos favorables sobre casos posibles

17. Una urna contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se eligen tres bolas al azar. Calcular las probabilidades de que: (a) todas las bolas extraídas sean blancas; (b) todas las bolas extraídas sean negras; (c) se extraiga una bola blanca y dos negras.

18. Para obtener el premio mayor en una lotería se precisa acertar 5 números elegidos entre 49. Calcular la probabilidad de obtener el premio mayor en esta lotería.

19. De un mazo de 52 cartas se eligen 4 cartas al azar. Calcular la probabilidad de que se extraigan: (a) por lo menos un as; (b) no menos de dos ases.

20. Se considera un experimento consistente en arrojar un dado dos veces consecutivas. Calcular la probabilidad de que la suma de los resultados sea: (a) igual a 5; (b) no mayor de 5.

21. Calcular la probabilidad de que se acepte una partida de 100 unidades, 5 de las cuales están falladas, si se toman de muestra la mitad, y las condiciones para aceptarla son contener a lo sumo un $2\,\%$ de unidades falladas.

22. Se tienen K urnas con n bolas cada una, numeradas de 1 a n. De cada urna se elige al azar una bola. Hallar la probabilidad de que el número mayor resultante sea m ($m = 1, \ldots, n$).

23. *(Problema del cumpleaños)* (a) Calcular la probabilidad p_r de que los cumpleaños de r estudiantes sean todos diferentes (asumir años de 365 días y que cada configuración de cumpleaños es equiprobable).
(b) A partir de la siguiente aproximación:

$$\log(1+u) \approx u \text{ si } u \text{ es pequeño,}$$

dar una aproximación para $\log(p_r)$.
(c) Deducir a partir de qué cantidad de estudiantes, r, la probabilidad de que hayan al menos dos que cumplan el mismo día es mayor a $\frac{1}{2}$.

24. En un cajón hay calcetines rojos y calcetines negros. Cuando se extraen dos calcetines al azar, la probabilidad de que ambos sean rojos es $\frac{1}{2}$.
(a) Indicar cuán pequeño puede ser el número de calcetines del cajón.
(b) Calcular cuán pequeño puede ser si el número de calcetines negros es par.