Práctico 1

Sistemas de ecuaciones

1. Resolver los siguientes sistemas e interpretar geométricamente el resultado.

$$\begin{cases} x+2y &= 8 \\ 3x-y &= 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2\sqrt{2}x-\sqrt{8}y &= 0 \\ x-y &= 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{2}{3}y &= \frac{1}{6}(4x-3) \\ x-y &= \frac{3}{4} \end{cases}.$$

2. El señor Ostolozzo cría gallinas y ovejas en un corral. La cantidad de gallinas es el triple que la de ovejas. El señor Ostolozzo sabe que hay un total de 30 patas en el corral. ¿Cuántas gallinas hay?

3. Resolver los siguientes sistemas cuadrados.

$$\begin{cases} 2x-3y+5z &= 12 \\ x+2y-3z &= -5 \\ -3x+y+2z &= 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 6x+6y-9z &= 3 \\ 33x-22y+55z &= 0 \\ 40x+140y-250z &= 20 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x-2y+5z &= -1 \\ \frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y+2z &= \frac{8}{3} \\ x-\frac{17}{5}y+11z &= -\frac{7}{5} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x+z &= 3 \\ y+z &= -2 \\ x+y &= -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ -3x-5y+5z &= 2 \\ -x-y+3z &= 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x-3y+4z &= 2 \\ 3x+2y-3z &= 1 \\ 7x-4y+5z &= 3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 1 \\ 2x+3y+3z+3t &= 1 \\ 3x+3y+4z+4t &= 1 \\ 5x+5y+5z+6t &= 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-2y+z+t &= 1 \\ 3x+2z-2t &= 3 \\ 4y-z-t &= 2 \\ 5x+3z-t &= 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y-2z-3t &= 1 \\ x-y+2z-t &= 3 \\ 3x+y-2z-7t &= 5 \\ -x+3y-6z-t &= -5 \end{cases}.$$

4. Resolver los siguientes sistemas rectangulares.

$$\begin{cases} 5x-y-z &= 4 \\ x-y-2z &= -5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2y-z &= 0 \\ 2x+4y-2z &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2y-z+t &= 7 \\ 3x+6y-3z+3t &= 20 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x+2y+2z &= 5 \\ x+y+2z &= 5 \\ 2x-y+3z &= 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x+2y+2z &= 5 \\ x+y+2z &= 5 \\ 3x-y+2z &= 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x-y+z &= 2 \\ 4x+3y-3z &= 4 \\ x+4y-4z &= 1 \end{cases}.$$

5. Indicar si los siguientes sistemas homogéneos admiten alguna solución no trivial. En caso afirmativo, hallar todas las soluciones y los grados de libertad.

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+2y+3z &= 0 \\ x+4y+9z &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+y-z &= 0 \\ x+y+3z &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x-y+z-t &= 0 \\ 3x+y+3z+t &= 0 \\ x+3y+z+3t &= 0 \end{cases}.$$

6. Resolver y discutir (según los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x+\alpha y &= 4 \\ x-2y &= \beta \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y-z &= 2 \\ x+2y+z &= 3 \\ x+y+(\alpha-5)z &= \alpha \end{cases}; \quad \begin{cases} x+2y+z &= 2 \\ x+y+2z &= 3 \\ x+3y+\beta z &= 1 \\ x+2y+z &= \alpha \end{cases}; \quad \begin{cases} \alpha x+y-z &= \alpha \\ x+\alpha y-z &= 1 \\ 3x+y+\beta z &= 2 \\ x-y-z &= 1 \end{cases}.$$

Soluciones

1. *a*) $x = 2$, $y = 3$.
   b) Sistema incompatible.
   c) Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad. Solución: $x = \frac{3}{4} + y$, con y libre.

2. Hay 9 gallinas.

3. *a*) $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$.
   b) Sistema incompatible.
   c) $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$.
   d) $x = 2$, $y = 1$, $z = -3$.
   e) Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad. Solución: $x = 5z - 9$, $y = -2z + 5$, con z libre.
   f) Sistema incompatible.
   g) $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$, $t = -4$.
   h) Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.
   Solución: $x = 5 - 4t$, $y = -1 + 2t$, $z = -6 + 7t$, con t libre.
   i) Sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad.
   Solución: $x = 2 + 2t$, $y = -1 + 2z + t$, con z y t libres.

4. *a*) Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.
   Solución: $y = -13 + 9x$, $z = 9 - 4x$, x libre.
   b) Sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad.
   Solución: $z = x + 2y$, x e y libres.
   c) Sistema incompatible.
   d) $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$.
   e) Sistema incompatible.
   f) Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.
   Solución: $x = 1$, $y = z$, con z libre.

5. *a*) La única solución es la trivial.
   b) Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.
   Solución: $z = 0$, $y = -x$, x libre.
   c) Sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad.
   Solución: $x = -z$, $y = -t$, con z y t libres.

6. *a*) Si $\alpha \neq -4$, el sistema es compatible determinado y su solución es $x = \frac{\alpha\beta+8}{\alpha+4}$ e $y = \frac{4-2\beta}{\alpha+4}$.
   Si $\alpha = -4$ y $\beta \neq 2$, el sistema es incompatible.
   Si $\alpha = -4$ y $\beta = 2$, el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad, su solución es $x = 2 + 2y$, con y libre.
   b) Si $\alpha = 4$, el sistema es incompatible.
   Si $\alpha \neq 4$, el sistema es compatible determinado y su solución es $x = \frac{4\alpha-10}{\alpha-4}$, $y = \frac{-\alpha}{\alpha-4}$ y $z = \frac{\alpha-2}{\alpha-4}$.
   c) Si $\alpha \neq 2$, el sistema es incompatible.
   Si $\alpha = 2$ y $\beta \neq 0$, el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad, su solución es $x = 4-3z$, $y = z - 1$, con z libre.
   Si $\alpha = 2$ y $\beta \neq 0$, el sistema es compatible determinado, su solución es $x = z = 0$, $y = 1$.
   d) Si $\alpha \neq \pm 1$, el sistema es incompatible.
   Si $\alpha = 1$ y $\beta = -3$, el sistema es incompatible.
   Si $\alpha = 1$ y $\beta \neq -3$, el sistema es compatible determinado, su solución es $x = \frac{\beta+2}{\beta+3}$, $y = 0$, $z = \frac{-1}{\beta+3}$.
   Si $\alpha = -1$, el sistema es compatible determinado, su solución es $x = 1$, $y = z = 0$.