ANUNCIOS

1- Inscribirse en EVA en: “Grupo de teórico virtual”

2- Completar: “Encuesta sobre uso de clases virtuales”
Es a efectos estadísiticos…

3- Primer evaluación corta: Se realizará la próxima seman entre jueves y sábado 2 de abril.
Temas: Unidad 1 (leyes de escala, cifras significativas, análisis dimensional y estimaciones sencillas).

4- Consultas: me voy a conectar 30 minutos antes de cada clase virtual por si tienen consultas a realizar, en todo caso puedo ampliar el rango o eventualmente poner una clase especial a coordinar.

5- La clase se va a grabar…

Estimaciones , leyes de escala, análisis dimensional

Repaso matemático: potencias

Todo **producto de factores iguales** se puede escribir en forma de **potencia**.
El factor que se repite se llama **base** y el número de veces que se repite se llama **exponente**: **$7\times7\times7\times7 = 7^4$** **$a\times a\times a = a^3$**

Exponente negativo: $7^{-4} = \frac{1}{7^4} = \frac{1}{7\times7\times7\times7}$ $a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a\times a\times a}$

Producto de potencias de igual base: $2^3\times2^4\times2=2^{3+4+1}=2^8$ $a^x \times a^y = a^{x+y}$

Cociente de potencias de igual base: $\frac{5^5}{5^2} = 5^{5-2} = 5^3$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

Producto de potencias de igual exponente: $3^3\times2^3\times5^3 = (3\times2\times5)^3 = 30^3$
$a^x \times b^x = (a\times b)^x$

Cociente de potencias de igual exponente: $\frac{6^3}{3^3} = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 2^3$ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

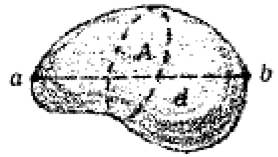
Potencia de una potencia: $(5^3)^2 = 5^{3\times2} = 5^6$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Exponente fraccionario: $\sqrt{8} = 8^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = x^{\frac{m}{n}}$$

Repaso de la clase pasada

Dos cuerpos son semejantes cuando la razón entre las dimensiones lineales que lo caracterizan es la misma, cualesquiera que sean éstas

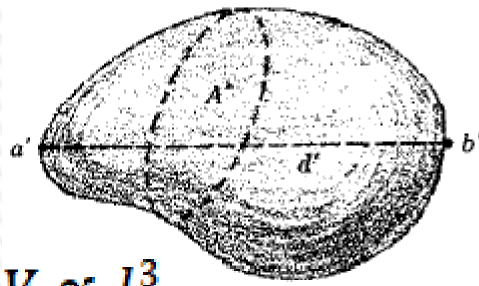


El **factor de escala (*k*)** es la razón de longitudes correspondientes en dos figuras semejantes (también se le llama **razón de semejanza**).

$$k = \frac{d'}{d}$$

Razón entre las áreas transversales *A* y *A'* vale: $\frac{A'}{A} = k^2$

Razón entre los volúmenes *V* y *V'* vale: $\frac{V'}{V} = k^3$



Si S es la superficie y V el volumen se cumple: $S \propto l^2$ $V \propto l^3$

Ley cuadrática-cúbica $S = KV^{\frac{2}{3}}$

para el cubo vimos que K=6, y para la esfera K≅4,84

La masa y el peso son proporcionales al volumen, mientras que la fuerza de cualquier organismo depende del área de la sección transversal, es decir de la superficie.

Fuerza relativa de un animal: peso que puede levantar (o soportar) por la acción de sus músculos dividido por su propio peso.

Si $F_{máx}$ peso o fuerza máxima que puede realizar y *W* su propio peso: $f = \frac{F_{máx}}{W}$

$$f' = \frac{F'_{máx}}{W'} = \frac{k^2 F_{máx}}{k^3 W} = \frac{F_{máx}}{kW} = \frac{1}{k} f$$

$$f' = \frac{1}{k} f$$

Repaso de la clase pasada

La fuerza relativa de un ejemplar con un factor de escala k se reduce en un factor $1/k$.

Por lo tanto, una hormiga es intrínsacamente más débil que un hombre o un elefante. De hecho, **una hormiga gigante del tamaño humano no sería una criatura biológicamente viable: ya que sólo podría levantar un porcentaje pequeño de su peso, incluso no podría levantar ni siquiera sus patas!**
Para un animal de forma dada, la resistencia de sus huesos con respecto a su propio peso depende de su tamaño, y cuanto mayor sea el animal, más pequeña es su fuerza relativa.
La forma de los animales grandes es muy diferente a la de animales pequeños.

El efecto de escala interviene en otras propiedades fisiológicas.
Las **velocidades a la que se extrae el oxígeno del aire, a la que los alimentos se digieren y absorben en el intestino, a la que se pierde calor en la superficie del cuerpo, son proporcionales a las áreas de los pulmones, intestinos y la piel respectivamente, por tanto a k^2**.
La **velocidades a la que se debe suministrar oxígeno o alimento , o a la que se produce calor es proporcional a la masa (por tanto al volumen) del animal, por tanto a k^3**.
Esto repercute en la rapidez carrera, altura en saltos, potencia desarrollada.

Leyes de escalas –División celular

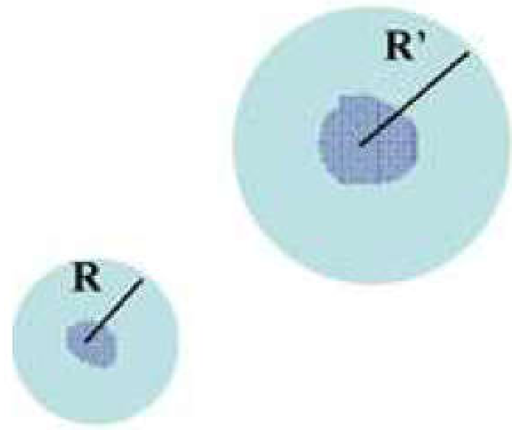
¿Por qué se dividen las células cuando alcanzan cierto tamaño?

Vamos a modelar a las células como esféricas.

El factor de escala de la célula más vieja (y más grande de radio R') con respecto a la célula más joven (y menor de radio R) vale: $k = R'/R$

Volumen de célula vieja (V') es k^3 veces el volumen de célula más joven (V), por lo que tiene k^3 veces el material metabólico del de la más joven, por lo que requiere k^3 veces más oxígeno (y otras sustancias), que la más joven.

Todo el oxígeno consumido por la célula debe pasar a través de la pared de la misma, por lo que la cantidad de oxígeno por unidad de tiempo requerida será proporcional al área de la pared celular.



Por lo tanto la célula más vieja puede obtener a lo sumo k^2 veces el oxígeno que obtiene la más joven por unidad de tiempo.

El cociente entre la cantidad máxima de oxígeno que se puede obtener y el oxígeno necesario se llama **factor de viabilidad (f_V)**. Para que la célula sobreviva $f_V > 1$.

De las relaciones anteriores se deduce que:

$$f_{V\ \text{célula vieja}} = \frac{1}{k} f_{V\ \text{célula joven}}$$

Leyes de escalas – División celular

$$f_{V\ célula\ vieja} = \frac{1}{k} f_{V\ célula\ joven}$$

Una célula joven tiene un f_V mayor que 1. Cuando la célula crece, su f_V disminuye y se acerca a 1, para evitar la asfixia, la célula debe detener su crecimiento o dividirse. Por medio de la división, la célula grande con un f_V pequeño es reemplazada por dos células más pequeñas, c/u con un f_V mayor.

EJEMPLO: ejercicio 10 continuación

Una mujer de 1,55 m de altura pesa 50 kg. ¿Cuánto pesaría una mujer de 1,70 m y forma semejante?

Datos: L= 1,55 m; W= 50 kg; L'= 1,70 m

Modelamos a las mujeres como semejantes, entonces su factor de escala *k* vale:

$$k = \frac{L'}{L} = \frac{1{,}70}{1{,}55} = 1{,}09677$$

Por lo visto, el peso varía en función de k^3: $W' = k^3 W = (1{,}09666)^3\ (50) = 65{,}97$ kg

Expresando el resultado con dos cifras significativas: **W'= 66 kg**

Supongamos que la mujer de 1,55 m y 50 kg, puede levantar una masa de hasta 25 kg. ¿Cuánto podrá levantar una mujer semejante de 1,70 m?

La fuerza relativa de la mujer de 1,55 m vale: $f = \frac{F_{máx}}{W} = \frac{25}{50} = 0{,}50$

Mientras que la fuerza relativa de la mujer de 1,70 m vale: $f' = \frac{f}{k} = \frac{0{,}50}{1{,}09677} = 0{,}4559$

Por tanto podrá levantar una masa de hasta:

$$F'_{máx} = f'.W' = 0{,}4549 \times 65{,}966 = 30{,}0\ kg$$

Podrá levantar hasta una masa de 30 kg

Análisis dimensional

Dimensión: naturaleza física de una cantidad o magnitud.

Si **mido una distancia** en **unidades de metros, pulgadas o codos**, se trata de la **magnitud distancia** y la **dimensión** es la **longitud**.

Símbolos dimensiones básicas mecánica: L longitud, M masa y T tiempo.
Se usan corchetes [ ] para indicar las dimensiones de una magnitud.
Ejemplos, velocidad (v): $[v] = L/T$; área (A): $[A] = L^2$.

Con frecuencia es necesario deducir una expresión matemática o una ecuación o bien verificar su validez, esto se puede hacer con el **análisis dimensional, que hace uso del hecho de que las dimensiones pueden ser tratadas como cantidades algebraicas.**
Estas cantidades, por ejemplo, se pueden sumar o restar sólo si tienen las mismas dimensiones.
Si los términos en los lados opuestos de una ecuación tienen las mismas dimensiones, entonces puede ser correcta, es una condición necesaria, pero no suficiente!
El análisis dimensional tiene valor como verificación parcial de una ecuación y también puede usarse para desarrollar una comprensión de las relaciones entre las magnitudes físicas en situaciones muy complejas.

Análisis dimensional

El **análisis dimensional** aprovecha el hecho de que *las dimensiones pueden tratarse como cantidades algebraicas*.

- Las cantidades sólo pueden sumarse o restarse si tienen las mismas dimensiones (es decir son homogéneas).
- Los dos miembros de una igualdad (o ecuación) deben tener las mismas dimensiones.

Con el análisis dimensional puedo deducir o verificar una fórmula o expresión, determinar las unidades (o dimensiones) de la constante de proporcionalidad, pero no su valor numérico.

Por tanto no puedo determinar las constantes adimensionadas.

Ejercicio 1.14

Imagine que se encuentra Ud. en un examen de física y le parece recordar una ecuación para obtener la velocidad *v* con que una piedra llega al piso después de caer desde una altura *h*. La fórmula que recuerda es la siguiente: $v = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ donde g es la aceleración de la gravedad? La usaría usted en el examen o existen motivos para desconfiar de su memoria?

$$v = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Veamos las dimensiones de *h*, *v* y *g*:

$$[v] = \left[\sqrt{\frac{2h}{g}}\right] = \sqrt{\frac{2[h]}{[g]}}$$

$[h]$ =L;
$[v]$ = L/T= $L.T^{-1}$;
$[a]$ =L/T^2 = $L.T^{-2}$;

$$LT^{-1} = \sqrt{\frac{L}{LT^{-2}}} = \sqrt{\frac{1}{T^{-2}}} = \sqrt{T^2} = T$$

La expresión no es dimensionalmente correcta, por tanto no puede estar bien!!!

Ejemplo:

Análisis dimensional- a) La ley de Gravitación Universal de Newton establece que la fuerza de atracción entre dos cuerpos depende de sus masas y de la distancia que las separa:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

¿Qué dimensiones debe tener la constante *G para que la ecuación tenga sentido?*

A partir de la ley puedo deducir que: $G = \frac{F.r^2}{M.m}$

Dimensiones: $[M] = [m] = M$; $[r^2] = L^2$; $[F] = MLT^{-2}$.(pues F = m.a)

$[G] = [F] . [r^2] / ([M].[m])$

$[G] = (MLT^{-2}).(L^2)/((M)(M))$

$[G] = M^{(1-(1+1))}.L^{(1+2)}\ T^{-2} = M^{-1}L^3T^{-2}$

$[G] = L^3/(M.T^2)$

$$\boxed{[G] = M^{-1}L^3T^{-2}}$$

Unidades:

$m^3/(kg.s^2)$ $= N.m^2/kg^2$

Ejemplo: parcial 2020

Dos serpientes de una misma especie (y por tanto de forma semejante) tienen masas diferentes. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre las mismas son correctas?

Determina cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a) Las longitudes de las serpientes guardan la misma proporción que sus volúmenes.

b) Los pesos de las serpientes guardan la misma proporción que sus largos.

c) Las dos serpientes tienen igual densidad.

d) Las áreas de la superficie de la piel guardan la misma proporción que sus largos.

e) Las longitudes de las serpientes guardan la misma proporción que sus anchos.

Ejemplo: parcial 2020

Se sabe que X es una distancia y está relacionado con Z mediante la fórmula

$$Z = X^3 + 2K X^4$$

siendo K una constante. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre X y Z es correcta?

a) Z se puede medir en metros cúbicos y K tiene dimensiones de longitud elevado a la 4.

b) Z tiene dimensiones de longitud y K tiene dimensiones de longitud elevado a la -4.

c) La fórmula planteada es dimensionalmente incorrecta.

d) Z se puede medir en litros y K es adimensionado.

e) Z se puede medir en litros y K tiene dimensiones de longitud elevada a la -1

Ejemplo: parcial 2021

Al caer un objeto en caída libre, si parte de una altura inicial considerable y no despreciamos la resistencia del aire, el objeto puede alcanzar una velocidad terminal (**v_T**), es decir llega a una velocidad tal, que será la máxima ya que no variará. Esta velocidad terminal depende de: el peso *W* del objeto, su sección transversal *A* (área de un corte perpendicular a la dirección vertical) y de la densidad del aire *ρ*.

Su expresión está dada por:

$$v_T = \sqrt{\frac{2}{C_d} W^a A^b \rho^c}$$

Donde C_d es una constante adimensionada. Mediante el análisis dimensional determine los exponentes *a, b* y *c*.

A) a=1/2; b=1/2; c=1/2
B) a=2; b=2; c=-5/3
C) a=1/2; b=1/2; c=-1/6
D) a=2; b=-1/2; c=1/2
E) a=-1/2; b=1/2; c=1/6
F) a=1/2; b=1/2; c= 0
G) a=1/2; b=-1/2; c=-1/2
H) a=2; b=-2; c=-1

$$v_T = \sqrt{\frac{2}{C_d} W^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2W}{C_d A \rho}}$$

$[v_T] = LT^{-1}$ $[W]=MLT^{-2}$ $[A]=L^2$ $[\rho]=ML^{-3}$

$$[v_T] = \left[\sqrt{\frac{2}{C_d} W^a A^b \rho^c}\right] = [W^a A^b \rho^c] = [W]^a [A]^b [\rho]^c$$

$[v_T] = [W]^a[A]^b[\rho]^c$

$LT^{-1} = (MLT^{-2})^a (L^2)^b (ML^{-3})^c = (M^a L^a T^{-2a})(L^{2b})(M^c L^{-3c}) = M^{a+c} L^{a+2b-3c} T^{-2a}$

M: $0 = a+c$

L: $1 = a+2b-3c$

T: $-1 = -2a$

$a=1/2$ $c=-1/2$ $1 = (1/2)+2b-3(-1/2) = 2+2b$

$b=-1/2$