

**Física de Radiaciones I**  
**Hoja 4 - 2023 - Instituto de Física**

1. La distribución angular de la potencia radiada por una partícula acelerada es:

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{n}' \times [(\hat{n}' - \vec{\beta}') \times \dot{\vec{\beta}}']|^2}{(1 - \vec{\beta}' \cdot \hat{n}')^5}$$

- a) Integrando en ángulo sólido, obtenga la fórmula de Larmor generalizada (también conocida como fórmula de Liénard), dada por:

$$P' = \frac{\mu_0 c}{6\pi} q^2 \gamma^6 \left( \dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 \right)$$

- b) Construya el cuadrivector  $dp^\mu/d\tau$  y demuestre que  $P'$  es invariante Lorentz. Tenga en cuenta que  $P'$  se puede generalizar a partir de la expresión:

$$P' = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2$$

2. En el caso de  $\beta$  paralelo a  $\dot{\beta}$ :

- Determine el ángulo para el que  $dP'/d\Omega$  es máximo.
- Determine el valor de  $dP'/d\Omega$  en el máximo y la proporcionalidad con  $\gamma$ .
- Demuestre que el valor medio de  $\theta$  va como  $1/\gamma$ .
- Calcule a partir de  $dP'/d\Omega$  la expresión de  $P'$  en este caso.

3. Repita el problema 2 para el caso de  $dP'/d\Omega$ . Recuerde que  $P'$  es la potencia emitida y  $P$  la recibida, ambas relacionadas a través de la expresión:

$$P' = P \frac{dt}{dt'}$$

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \vec{\beta}' \cdot \hat{n}'$$

- Repita el problema 2 para el caso de  $\beta$  perpendicular a  $\dot{\beta}$  y determine las direcciones en las que no se emite radiación.
- Repita el problema 3 para el caso de  $\beta$  perpendicular a  $\dot{\beta}$  y determine las direcciones en las que no se emite radiación.
- Obtenga la relación entre la potencia radiada en un acelerador lineal (movimiento unidimensional) y la potencia suministrada al acelerador  $dE/dt$ . Considere el caso relativista ( $\beta \rightarrow 1$ ). Estime cuantitativamente si la energía radiada en un acelerador lineal es significativa (típicamente la ganancia en energía de un acelerador es menor a 50 MeV/m).

7. Repita el problema 6 para el caso de un acelerador circular como un sincrotrón o un betatrón.
  
8. Calcula la energía radiada por
  - a) electrones en un acelerador lineal de 50 GeV de 3 km de largo (asume aceleración constante).
  - b) protones de 13 TeV en una revolución en una circunferencia de 8,6 km de radio.
  - c) electrones de 6 MeV en un acelerador lineal de 150 cm (típicamente usados en radioterapia). Calcula, además, la energía radiada cuando estos electrones inciden sobre el blanco de tungsteno y se detienen (aproximadamente unos 0,3 cm de tramo).