Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Medida e Integración–Curso 2023

Práctico 1: Preliminares, conjuntos de Cantor y medida exterior

Varios de los ejercicios están tomados del (Capítulo 1 del) libro [RA]: "Real Analysis"de Stein y Shakarchi. Se sugiere consultarlo, dado que el libro contiene sugerencias y ejercicios relacionados que pueden ser de ayuda. Otros ejercicios tienen pre-requisitos de Topología, se indican con una [T].

1. **Conjunto de Cantor** (Ejercicios 1, 2, y 3 de [RA]).

   Definimos una sucesión de subconjuntos de $[0,1]$ de la siguiente manera:

   $C_0 = [0,1]$ y para $k > 0$ el conjunto C_k es el conjunto que se obtiene quitando de cada componente de C_{k-1} el intervalo central abierto de proporción $\xi = 1/3$ [1] .

   a) Probar que $C = \cap_{n=0}^{\infty} C_n \subset [0,1]$ es un conjunto no vacío, compacto, perfecto y totalmente disconexo[2].

   b) Probar que el complemento de C en $[0,1]$ es una unión numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos, y que la suma de las longitudes de todos esos intervalos es igual a 1.

   c) Todo real $x \in [0,1]$ tiene una expansión ternaria de la forma

   $$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k},$$

   donde $a_k \in \{0,1,2\}$ para todo k (observar que esta expansión no es única. Por ejemplo, $1/3 = \sum_{k=2}^{\infty} 2/3^k$). Probar que $x \in C$ si y sólo si x tiene una expansión ternaria donde no aparece el dígito 1 . Concluir que C es un conjunto no numerable.

   d) **Función de Cantor-Lebesgue**.
   Sea $F : C \longrightarrow [0,1]$ definida como

   $$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k},$$

   donde $b_k = a_k/2$ y $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k/3^k$ es una expansión ternaria de x tal que $a_k \in \{0,2\}$ para todo k. Probar que F es continua, sobreyectiva, creciente y que $F(0) = 0$, $F(1) = 1$.

   e) Mostrar que la función anterior se puede extender a una función continua en todo $[0,1]$ que es constante en cada componente conexa del complemento de C. Graficar.

   f) [T] Sea $\Omega_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n = 0,1\}$ el conjunto de las sucesiones de ceros y unos. El conjunto Ω_2 es el producto cartesiano de copias del espacio discreto $\{0,1\}$ indexado en los naturales, y por lo tanto es un espacio topológico compacto con la topología producto. Se puede demostrar que Ω_2 es metrizable, y una métrica viene dada por $d(x,y) = \sum_{n\geq 1} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$. La topología de Ω_2 está generada por los *cilindros*

   $$c_{n_1,\ldots,n_k}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k} = \{x \in \Omega : x_{n_i} = \varepsilon_i\},$$

   donde $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. En la construcción del conjunto de Cantor, C_1 es una unión de 2^1 intervalos cerrados. Llamaremos I_0 al que está a la izquierda e I_1 al que está a la derecha. Luego, C_2 es

[1] Si I es un intervalo, *el intervalo central abierto de proporción ξ en I* es el intervalo abierto I' centrado en el punto medio de I tal que $|I'| = \xi \cdot |I|$.

[2] Un conjunto $A \subset [0,1]$ es *perfecto* si contiene a todos sus puntos de acumulación, es decir, si no contiene puntos aislados. Es *totalmente disconexo* si todo intervalo de extremos $x, y \in A$ (con $x \neq y$) contiene puntos del complemento de A.

unión de 2^2 intervalos cerrados, que son dos subintervalos de I_0 y dos de I_1. Llamaremos I_{00} al subintervalo de I_0 que está a la izquierda, I_{01} al subintervalo de I_0 que está a la derecha, y análogamente definimos I_{10}, I_{11}. En general, C_k es la unión de 2^k intervalos cerrados $I_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k}$ con $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ para todo i.

Sea $f : \Omega_2 \longrightarrow C$ definida de la siguiente manera: $f(x)$ es el único punto del conjunto $\cap_{n\geq 1} I_{x_1,\ldots,x_n}$. Probar que f está bien definida y que es un homeomorfismo[3] entre el conjunto de Cantor y Ω_2.

2. **Conjuntos de Cantor II** (Ejercicio 4 de [RA]).

   Construiremos ahora un conjunto $\hat{C}$ con el mismo procedimiento que el conjunto de Cantor (es decir, retirando intervalos centrales en cada etapa), pero ahora en el k-ésimo paso la longitud de los intervalos que se retiren será l_k, donde la sucesión $(l_k)_{k=1}^{\infty}$ cumple que $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} l_i < 1$.

   a) Sea $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} l_i < 1$. Probar que $m_*(\hat{C}) = 1 - \lambda$.

   b) Mostrar que si $x \in \hat{C}$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \notin \hat{C}$ pero $x_n \to x$ y $x_n \in I_n$, donde I_n es un sub-intervalo en el complemento de $\hat{C}$ con $|I_n| \to 0$.

   c) Probar que en consecuencia, $\hat{C}$ es perfecto y no contiene intervalos abiertos.

   d) Probar que $\hat{C}$ es no numerable.

   e) ([T]) Construir un homeomorfismo $h : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tal que $h(C) = \hat{C}$ y concluir que estos conjuntos son homeomorfos. Sugerencia: Definir primero h en el complemento de C.

3. ([T]) Mostrar que todo espacio métrico compacto, perfecto (i.e. sin puntos aislados) y totalmente disconexo (i.e. todo punto tiene una base de entornos simultaneamente abiertos y cerrados) es homeomorfo a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto. A un espacio topológico perfecto y totalmente disconexo le llamaremos *conjunto de Cantor*.

4. (Ejercicio 10 de [RA]) Construiremos una sucesión decreciente[4] de funciones continuas positivas[5] en $[0,1]$ que converge puntualmente[6], y su límite no es integrable Riemann.

   Sea $\hat{C} \subset [0,1]$ un conjunto de Cantor de medida positiva como se construyó en el ejercicio 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea F_n una función continua tal que: $0 \leq F_n(x) \leq 1$, $F_n(x) = 1$ si $x \in \hat{C}_n$ y F_n vale cero en los puntos medios de los intervalos que forman el complemento de $\hat{C}_n$. Sea $f_n = F_1 \cdot F_2 \cdots F_n$.

   a) Probar que para todo $x \in [0,1]$ se tiene que $0 \leq f_n(x) \leq 1$ y $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, y por lo tanto f_n converge puntualmente a una función f.

   b) Probar que f es discontinua en todo punto de $\hat{C}$. Concluir que f no es integrable Riemann (ver ejercicio 6).

5. **Contenido de Jordan** (Ejercicio 14 de [RA]).

   El objetivo de este ejericio es observar que los cubrimientos finitos no son suficientes para definir la medida exterior. Se define el contenido exterior de Jordan de un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ como

$$J_*(E) = \text{ínf}\left\{ \sum_{j=1}^{N} |I_j| : E \subset \cup_{j=1}^{N} I_j, I_j \text{ intervalos y } N \in \mathbb{N} \right\}.$$

   a) Probar que $J_*(E) = J_*(\bar{E})$, para todo $E \subset \mathbb{R}$

   b) Construir un conjunto numerable $E \subset [0,1]$ tal que $J_*(E) = 1$ y $m_*(E) = 0$

[3] Función continua, sobreyectiva y de inversa continua.

[4] Es decir, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in [0,1]$.

[5] Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es *positiva* si $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$.

[6] Una sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ converge puntualmente a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ si $\text{lím}_n f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [0,1]$.

6. **Funciones integrables de Riemann** (Problema 4 de [RA]).

   El objetivo de este ejercicio es probar lo siguiente: *Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ acotada es integrable Riemann si y sólo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida nula.*[7]

   Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ acotada. Definimos $M(x,r) = \sup\{|f(y) - f(z)| : y, z \in B(x,r)\}$ y $M(x) = \lim_{r\to 0} M(x,r)$. Probar que:

   a) La función f es continua en x si y sólo si $M(x) = 0$.

   b) Para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $A_\varepsilon = \{x : M(x) \geq \varepsilon\}$ es compacto.

   c) Si el conjunto de discontinuidades de f tiene medida nula, entonces f es integrable Riemann. Sugerencia: Dado $\varepsilon > 0$, se puede cubrir A_ε con una unión finita de intervalos abiertos de medida $\leq \varepsilon$. Usar esto para elegir una partición adecuada de $[0,1]$ que permita estimar la sumas superiores e inferiores.

   d) Si f es integrable Riemann, probar que el conjunto de sus discontinuidades tiene medida nula. Sugerencia: El conjunto de discontinuidades de f está contenido en $\cup_n A_{1/n}$. Tomar una partición P de $[0,1]$ tal que la diferencia entre sumas superiores e inferiores sea $\leq \varepsilon/n$ y mostrar que el conjunto de intervalos de P cuyo interior intersecta a $A_{1/n}$ tiene largo total $\leq \varepsilon$.

   e) Extra: Dar un ejemplo de una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que sea integrable Riemann y tal que el conjunto de sus puntos de discontinuidad tenga contenido de Jordan no nulo.

7. **Conjunto de Vitali**.[8]

   En $\mathbb{R}$ consideramos la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$. Las clases de equivalencia para esta relación determinan una partición de $\mathbb{R}$. Esta partición esta dada por los conjuntos de la forma $[x] = \{y \in \mathbb{R} : x \sim y\}$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Usando el axioma de elección se puede tomar un conjunto $\mathsf{V} \subseteq [0,1]$ que contenga exactamente un miembro representativo de cada clase de equivalencia. Es decir, que para cada real x el conjunto $\mathsf{V} \cap [x]$ sea un conjunto con un único elemento. Llamamos a V conjunto de Vitali (observar que hay infinitas posibilidades para V).

   a) Consideremos $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ y sea $\mathsf{V}_k = \mathsf{V} + r_k$.
      i) Probar que $\mathsf{V}_k \cap \mathsf{V}_{k'} = \emptyset$ si $k \neq k'$.
      ii) Demostrar que $[0,1] \subset \cup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{V}_k \subset [-1,2]$ y concluir que V no es medible Lebesgue.

   b) i) Dado $\epsilon > 0$, modificar la construcción del conjunto de Vitali para que tenga medida exterior menor o igual a ϵ.
      ii) ¿Es posible pedir $\epsilon = 0$?
      iii) Construir un conjunto no medible Lebesgue contenido en un Cantor (como en el Ejercicio 2). ¿Puede ser cualquier Cantor?

[7] Un conjunto $A \subset [0,1]$ tiene *medida nula* si su medida exterior $m_*(A)$ es cero.

[8] Este ejercicio presupone conocimientos sobre la *medida de Lebesgue* en $\mathbb{R}$ y sus propiedades. Sin embargo, es autocontenido si uno asume lo siguiente: Si un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es medible Lebesgue entonces tiene una *medida de Lebesgue* asociada $m(E)$ tal que $0 \leq m(E) \leq \infty$. Si E y F son medibles Lebesgue y $E \subset F$ entonces $m(E) \leq m(F)$. Además, si $E_1, E_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de conjuntos medibles Lebesgue entonces $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ es medible Lebesgue y, si estos conjuntos son disjuntos dos a dos, entonces $m(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) = \sum_{n=1}^\infty m(E_n)$. Por último, todo intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es medible Lebesgue y $m([a,b]) = b - a$.