Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Medida e Integración–Curso 2023

Práctico 3: Funciones medibles e Integración en $\mathbb{R}^d$

1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funciones medibles. Probar que las funciones $1/f$, $\sqrt{f}$ y $\max\{f, g\}$ son también medibles. (Recordar que $\max\{f, g\}$ es la función tal que $\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$).

2. Probar lo siguiente: *Toda función medible $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el límite c.t.p. de una sucesión de funciones continuas.*

3. Sea $\chi_{[0,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función característica de $[0, 1]$. Probar que no existe una función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ para casi todo x.

4. El objetivo de este ejercicio es construir una función medible $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: Si $g = f$ c.t.p. entonces g es discontinua en todo punto de $[0, 1]$.

   a) Probar que $f = \chi_E$ tiene la propiedad deseada si $E \subset [0, 1]$ es un conjunto medible que verifica que $m(E \cap I) > 0$ y $m(E^c \cap I) > 0$ para todo intervalo $I \subset [0, 1]$.

   b) Probar que existe $E \subset [0, 1]$ como en la parte anterior.
   Sugerencia: Considerar $C_1 \subset [0, 1]$ un conjunto de Cantor de medida positiva como en el Ejercicio 2 del Práctico 2. Considerar luego en cada componente conexa (intervalo) de $[0, 1] \setminus C_1$ otro Cantor de medida positiva construido de forma adecuada. Unir estos (numerables) conjuntos de Cantor con C_1 para obtener un nuevo Cantor C_2. Repetir lo anterior inductivamente y definir $E := \bigcup_n C_n$.

5. *a*) Demostrar que $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ está correctamente definida como integral impropia de Riemann, pero que en este caso no se verifica la definición de integrabilidad de Lebesgue (es decir, no se verifica que $\int_{\mathbb{R}} |\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \chi_{[1,\infty)}(x)| < \infty$).

   b) Dar un ejemplo de función integrable Lebesgue que no sea integrable Riemann.

   c) ¿Existe un ejemplo de f integrable Lebesgue tal que para toda $g = f$ c.t.p. se cumpla que g no es integrable Riemann?

6. (Ejercicio 6 cap. 2 [RA]). La integrabilidad (Lebesgue) de f en $\mathbb{R}$ no implica la convergencia de $f(x)$ a cero cuando $x \to \infty$.

   a) Dar un ejemplo de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, positiva e integrable tal que $\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
   Sugerencia: Construir una versión continua de la función que vale n en cada intervalo $[n, n + \frac{1}{n^3})$, $n \geq 1$, y que vale 0 en el resto.

   b) Sin embargo, probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua e integrable entonces se verifica que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

7. *a*) Sea $f : E \to \mathbb{R}$ integrable para cierto $E \subset \mathbb{R}$ medible (es decir, f es medible y $\int_E |f| < \infty$). Probar que si $g : E \to \mathbb{R}$ es medible acotada entonces la función producto $fg : E \to \mathbb{R}$ es integrable (es decir, $\int_E |fg| < \infty$).

   b) Dar un ejemplo de $f, g : E \to \mathbb{R}$ integrables tales que $fg : E \to \mathbb{R}$ no sea integrable.

8. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable probar que $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ es uniformemente continua.
   Sugerencia: Usar Proposición 1.12 parte (ii) del cap. 2 de [RA].

9. **Desigualdad de Chebishev.** (Ejercicio 9, Cap. 2 [RA])

a) Sea $f \geq 0$ integrable. Si $\alpha > 0$ y $E_\alpha = \{x\colon f(x) > \alpha\}$, probar que

$$m(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\int f.$$

b) (Aplicación probabilística). Consideremos el espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{L}, P)$ donde P denota la medida de Lebesgue y $\mathcal{L}$ la sigma-álgebra de Lebesgue en $[0,1]$. Sea $X : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una variable aleatoria (i.e. una función medible). Se define su valor esperado como

$$EX = \int_{[0,1]} X.$$

Supongamos que $EX < \infty$. Encontrar un intervalo acotado I tal que la probabilidad de que X pertenezca a él sea al menos $0,9$. Es decir, tal que $P(\{\omega \in [0,1]; X(\omega) \in I\}) \geq 0{,}9$.

10. (Ejercicio 10, cap. 2 [RA]). Supongamos $f \geq 0$ y sean $E_{2^k} = \{x\colon f(x) > 2^k\}$ y $F_{2^k} = \{x\colon 2^k < f(x) \leq 2^{k+1}\}$. Si f es finita c.t.p., demostrar que $\cup_{k=-\infty}^{\infty} F_{2^k} = \{f(x) > 0\}$ y que los F_{2^k} son disjuntos. Probar que f es integrable si y sólo si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(F_{2^k}) < \infty,$$

si y sólo si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(E_{2^k}) < \infty.$$

Usar este resultado para verificar que $f(x) = |x|^{-a}\chi_{\{|x|\leq 1\}}$ es integrable en $\mathbb{R}^d$ si y sólo si $a < d$, y que $f(x) = |x|^{-b}\chi_{\{|x|>1\}}$ es integrable si y sólo si $b > d$.

11. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrable tal que $\int_E f \geq 0$ para todo $E \subset \mathbb{R}^d$ medible. Probar que $f \geq 0$ c.t.p. Si $\int_E f = 0$ para todo $E \subset \mathbb{R}^d$ medible probar que $f = 0$ c.t.p.

12. El objetivo de este ejercicio es construir una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable con la siguiente propiedad: Si $G = F$ c.t.p. entonces G es no acotada en cualquier subintervalo de $\mathbb{R}$.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^{-1/2}\chi_{(0,1)}$, y sea $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de los racionales. Definimos

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - q_n).$$

Notar que $F : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ podría tomar el valor ∞ en algunos puntos. Sin embargo, probar que F es integrable y por lo tanto que la serie que define a F converge para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Probar además que F tiene la propiedad buscada.

Sugerencia: Notar que $f_k(x) := \sum_{n=1}^{n=k} 2^{-n} f(x - q_n)$ define una sucesión creciente f_k de funciones medibles que converge puntualmente a F.

13. **Lema de Fatou revisitado.** En el teórico mostramos que si $f_n \geq 0$ y $f_n \to f$ c.t.p. entonces $\int f \leq \liminf \int f_n$.

a) Dar un ejemplo de lo anterior tal que $\int f < \liminf \int f_n$.

b) Mostrar que en general, si f_n es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces

$$\int (\liminf f_n) \leq \liminf \int f_n.$$

Dar un ejemplo tal que $\int(\limsup f_n) > \liminf \int f_n$. ¿Puede existir un ejemplo tal que $\int(\limsup f_n) > \limsup \int f_n$?

14. **Criterio de la Vallée-Poussin** Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones con dominio en $E \subset \mathbb{R}^d$ verificando que $m(E) < \infty$.

   a) Probar que $\mathcal{F}$ es *uniformemente integrable* sii

   $$\lim_{H \longrightarrow \infty} \sup_n \int_{\{x:f_n(x)>H\}} \mid f_n \mid dm = 0$$

   b) Supongamos que existe $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ creciente con $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \infty$ y tal que $\sup_n \int g(\mid f_n \mid) dm < \infty$. Entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente integrable.

15. **Convergencia de Vitali.** Decimos que una familia de funciones $\mathcal{F}$ con dominio en $E \subset \mathbb{R}^d$ medible de medida finita es *uniformemente integrable* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma tal que si $F \subset E$ cumple que $m(F) < \delta$ y $f \in \mathcal{F}$ entonces

   $$\int_F |f| < \varepsilon.$$

   Demostrar que si una sucesión de funciones $\{f_n\}_n$ es uniformemente integrable y $f_n \to f$ c.t.p. entonces f es integrable y $\int_E |f_n - f| \to 0$.