Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Medida e Integración–Curso 2023

Práctico 4: Convergencia y Teorema de Fubini

1. **Convergencia en medida.** Decimos que una sucesión de funciones medibles f_n *converge en medida a* f si para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0 \quad , \quad n \to \infty.$$

   a) Mostrar que convergencia en L^1 implica convergencia en medida[1].
   b) Dar un ejemplo de f_n que converge en medida pero no converge en L^1.
   c) Dar un ejemplo de f_n que converge ctp pero no converge en medida.
   d) Dar un ejemplo de f_n que converge ctp pero no converge en L^1.
   e) Dar un ejemplo de f_n que converge en medida pero no converge ctp.
   f) Mostrar que si f_n converge en medida entonce existe una subsuceción de f_n que converge ctp.
   g) Mostrar que si en vez de $\mathbb{R}^d$ se considera como dominio $[0,1]^d$ entonces convergencia ctp implica convergencia en medida.

2. **Lema de Scheffé.** Sean $f_n \geq 0$ y $f \geq 0$ tales que $\int f_n = \int f = 1$ para todo n y tal que $f_n \to f$ ctp. Mostrar que $\lim_n \int |f_n - f| = 0$.

3. $(*)$ **Teorema de Cantor-Lebesgue.**[2] Sean $(a_n), (b_n)$ sucesiones de numeros reales y sea $A_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. Mostrar que si $\sum_{n\geq 0} A_n(x)$ converge en un conjunto de medida positiva entonces (a_n) y (b_n) tienden a 0 con n.

4. **Completitud de las series de Fourier en L^2.** Mostrar que dada una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de números complejos que cumple que $\sum_n |c_n|^2 < \infty$ se tiene que existe una única función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definida en m-c.t.p. de forma tal que si $S_N : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ está definida como $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ entonces $\|f - S_N\|_2 \to 0$ cuando $N \to +\infty$. Mostrar que $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$.

5. $(*)$ **Densidad de los Polinomios.**

   a) Mostrar que los polinomios son densos en $L^2([0, 2\pi])$. (Sugerencia: Usar el ejercicio anterior y el hecho de que las funciones que aparecen en S_N son analíticas.) [3]

[1] Recordar que f_n converge a f en L^1 si $\lim_n \int |f - f_n| = 0$.

[2] Los ejercicios marcados con un asterisco $(*)$ pueden involucrar una dificultad mayor y requerir el apoyo de material extra: google, math.stack.exchange, notas de otros cursos, etc

[3] El espacio $L^2([0, 2\pi]) := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \text{ t.q. } \int_{[0,2\pi]} |f|^2 < \infty\}$ se considera con la distancia dada por la norma $||f||_2 = (\int_{[0,2\pi]} |f|^2)^{1/2}$.

b) Deducir que son densos también en $L^p([0,2\pi])$ para todo $1 \leq p < \infty$. ¿Por qué no es cierto para $L^\infty([0,2\pi])$?

c) Sea f en $L^2([0,2\pi])$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ denotamos $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$ y $S_Nf(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$. Mostrar que si $\sum_n |c_n(f)| < \infty$ entonces S_Nf converge uniformemente a f.

d) Mostrar que si f es de clase C^2, $f(0) = f(2\pi)$ y $f'(0) = f'(2\pi)$, entonces se cumple que $\sum_n |c_n| < \infty$.

e) Mostrar que las funciones de clase C^∞ son densas en las funciones continuas tales que $f(0) = f(2\pi)$ con la convergencia uniforme. (Sugerencia: Hacer la convolución con una aproximación de la identidad; y si no conocen esas palabras, buscarlas en internet.)

f) Deducir que los polinomios son densos en las funciones continuas de $[0,2\pi]$ con la topología de la convergencia uniforme. (Cuidado: No estamos restringiéndonos acá a las que cumplen $f(0) = f(2\pi)$.)

6. (Ejercicio 4 cap. 2 [RA]). Sea $f : (0,b] \to \mathbb{R}$ integrable para cierto $b > 0$. Se define

$$g(x) = \int_x^b (f(t)/t)dt \qquad \text{para } 0 < x \leq b.$$

Notar que $g : (0,b] \to \mathbb{R}$ está bien definida por lo visto en el Ejercicio 7 del práctico anterior. Probar que g es integrable y que

$$\int_{(0,b]} g = \int_{(0,b]} f.$$

7. (Ejercicio 16 cap. 2 [RA]). Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrable y $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d) \in \mathbb{R}^d$ tal que $\delta_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq d$. Se define

$$f^\delta(x) := f(\delta x) = f(\delta_1 x_1, \ldots, \delta_d x_d).$$

Probar que f^δ es integrable y que

$$\int f^\delta = |\delta_1|^{-1} \ldots |\delta_d|^{-1} \int f.$$

8. (Problema 4 cap. 2 [RA]). Sea $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ transformación lineal. Recordar que en un práctico anterior se probó que si $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible entonces $L(E)$ también lo es. El objetivo de este ejercicio es probar que además se cumple que

$$m(L(E)) = |\det(L)|m(E).$$

En particular, la medida de Lebesgue es invariante por isometrías de $\mathbb{R}^d$ (¿por qué?).

a) Para $d = 2$, probar (usando el teorema de Fubini) que $m(L(E)) = |\det(L)|m(E)$ se cumple para toda L dada por una matriz de tipo $L = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

b) Para d cualquiera, extender lo anterior (usando Fubini iteradamente) para toda L dada por una matriz triangular superior con entradas 1 en la diagonal (es decir, la matriz asociada $(a_{ij})_{ij}$ a L cumple que $a_{ii} = 1$ para todo $1 \leq i \leq d$ y $a_{ij} = 0$ si $i > j$).

c) Mostrar lo mismo para matrices triangulares inferiores con entradas 1 en la diagonal.

d) Tomar nota que si $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es una transformación lineal entonces se descompone como $D_i D D_s$ donde D_i es triangular inferior con 1's en la diagonal, D es una matriz diagonal y D_s es triangular superior con 1's en la diagonal. Esto se conoce como descomposición LDU de L. En internet pueden encontrarse pruebas de este interesante resultado de álgebra lineal que asumiremos.

e) Concluir que $m(L(E)) = |\det(L)|m(E)$ para toda $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ lineal y $E \subset \mathbb{R}^d$ medible.

9. Usar el ejercicio anterior para mostrar que si f es una función integrable en $\mathbb{R}^d$ y L es una transformación lineal invertible de $\mathbb{R}^d$, entonces $f \circ L$ es integrable y se cumple que:

$$\int f \circ L = |\det(L)|^{-1} \int f.$$

10. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible y no negativa. Se define el conjunto

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Demostrar que F es medible y que $m(F) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx$.

11. Sean $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ y $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$. Probar que:

$$m_*(E_1 \times E_2) \leq m_*(E_1) m_*(E_2).$$

12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - 2^{-n} & \text{si } (x,y) \in (n, n+1)^2 \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}_{>0}, \\ 2^{-n} - 2 & \text{si } (x,y) \in (n, n+1) \times (n+1, n+2) \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}_{>0}, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

a) Mostrar que para todo $y \in \mathbb{R}$ se cumple que la función $x \mapsto f(x, y)$ es integrable y calcular $F(y) = \int f(x, y) dm(x)$.

b) Mostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que la función $y \mapsto f(x,y)$ es integrable y calcular $G(x) = \int f(x,y)dm(y)$.

c) Mostrar que las funciones F y G son integrables pero que $\int F \neq \int G$.

d) Explicar por qué no aplica el Teorema de Fubini.

13. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función integrable. Mostrar que si $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |f(x)| > \alpha\}$ entonces $\int |f| = \int_0^\infty m(E_\alpha)d\alpha$.

14. *a*) Sea E un boreliano de $\mathbb{R}^2$. Para cada $y \in \mathbb{R}$ definimos $E^y \subset \mathbb{R}$ dado por $E^y = \{x \in \mathbb{R} \ : \ (x,y) \in E\}$. Mostrar que E^y es un boreliano. (Sugerencia: Mostrar que los abiertos tienen esa propiedad y que los conjuntos con dicha propiedad son una σ-álgebra.)

    b) Construir un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ medible Lebesgue tal que para algún $y \in \mathbb{R}$ el conjunto E^y no es medible Lebesgue.

15. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función medible tal que la función $g(x,y) : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = |f(x) - f(y)|$ es integrable. Probar que entonces f es integrable.

16. Sean $X : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ e $Y : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ variables aleatorias (es decir, funciones medibles). Sea m la medida de Lebesgue en $[0,1]^2$. Decimos que X e Y son independientes si

$$m\{\omega; X(\omega) \in A, Y(\omega) \in B\} = m\{\omega; X(\omega) \in A\} \ m\{\omega; Y(\omega) \in B\}, \ \forall A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

    a) Dar un ejemplo de un par de variables aleatorias con dicha propiedad.

    b) Probar que si X e Y son integrables e independientes entonces $E(X.Y) = EX.EY$.[4] (Sugerencia: Probarlo primero para X e Y funciones características independientes, luego para simples independientes, luego para integrables independientes.)

17. **Funciones convexas.** Una función $f : I \to \mathbb{R}$ (con $I \subset \mathbb{R}$ conexo) es *convexa* si para todo $x, y \in I$ y $0 \leq t \leq 1$ se cumple que $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

    a) Buscar una interpretación geométrica de que una función sea convexa.

    b) Mostrar que la función $|x|^p$ con $p \geq 1$ es convexa en $\mathbb{R}$, $-\log x$ es convexa en $(0, +\infty)$ y la función $x \log x$ en $[0, \infty)$ (donde consideramos $0 \log 0 = 0$).

    c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa. Mostrar que para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ existe (al menos) una función lineal $g(x) = ax + b$ de forma tal que $g(x_0) = f(x_0)$ y tal que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

    d) Probar que si $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa y tiene un mínimo local en x_0 entonces es un mínimo global.

    e) **Desigualdad de Jensen.** Si $\varphi : [0,1] \to I$ es integrable, entonces se cumple que $f\left(\int_{[0,1]} \varphi(t)dt\right) \leq \int_{[0,1]} f \circ \varphi(t)dt$. (Sugerencia: Considerar g función lineal tal que $g(\int_{[0,1]} \varphi) = f(\int_{[0,1]} \varphi)$ y tal que $g \leq f$ y usar que las funciones lineales entran y salen libremente de las integrales.)

[4] Por definición $E(X) := \int_{[0,1]^2} X(\omega)d\omega$.

f) **Rigidez.** Estudiar en qué condiciones puede ocurrir la igualdad en la desigualdad de Jensen.