Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Medida e Integración–Curso 2023

Práctico 5: Diferenciación y Densidad en $\mathbb{R}^d$

1. (Ejercicio 3 cap. 3 [RA]). Sea $E \subset \mathbb{R}$ medible tal que 0 es un punto de densidad de Lebesgue para E.

   a) Probar que existe una sucesión $(x_n)_n$ en $E \setminus \{0\}$ convergiendo a 0 tal que $-x_n$ está en E para todo n.

   b) Probar que existe una sucesión $(x_n)_n$ en $E \setminus \{0\}$ convergiendo a 0 tal que $2x_n$ está en E para todo n.

   c) Generalizar estas propiedades.

2. (Función maximal de Hardy-Littlewood - Ejercicio 4 cap. 3 [RA]). Recordar que si f es integrable en $\mathbb{R}^d$ se define su *función maximal* f^* como

$$f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

   donde el supremo es considerado sobre todas las bolas B que contienen al punto x.

   Probar que si f es integrable en $\mathbb{R}^d$ y no es igual a 0 ctp entonces

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|^d}, \qquad \text{para algún } c > 0 \text{ y para todo } |x| \geq 1.$$

   Concluir que f^* no es integrable en $\mathbb{R}^d$. Luego mostrar que el 'estimativo de tipo débil'

$$m(\{x \colon f^*(x) > \alpha\}) \leq c/\alpha$$

   para todo $\alpha > 0$ si $\int |f| = 1$ es el mejor estimativo posible en el siguiente sentido: si f tiene soporte en la bola unidad (es decir que vale 0 ctp fuera) y $\int |f| = 1$ entonces

$$m(\{x \colon f^*(x) > \alpha\}) \geq \frac{c'}{\alpha}$$

   para algún $c' > 0$ y todo $\alpha > 0$ suficientemente pequeño.

   (Sugerencia: Para la primera parte usar el hecho que $\int_B |f| > 0$ para alguna bola B).

3. (Ejercicio 7 cap. 3 [RA]). Sea $E \subset [0,1]$ medible tal que para cierto $\alpha > 0$ se cumple que $m(E \cap I) \geq \alpha m(I)$ para todo intervalo $I \subset [0,1]$. Probar que entonces $m(E) = 1$.

4. ¿Para todo $A \subset \mathbb{R}$ medible con $m(A) > 0$ existe una sucesión de reales $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que el complemento de $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A + s_n)$ en $\mathbb{R}$ tiene medida cero?

5. (Pág 108 [RA]). Decimos que una familia $\{U_\alpha\}_\alpha$ de mebibles de $\mathbb{R}^d$ *decrece regularmente* a un punto $\bar{x}$ (o que tiene *excentricidad acotada* en $\bar{x}$) si existe una constante $c > 0$ tal que para todo U_α existe una bola B con

$$\bar{x} \in B, \qquad U_\alpha \subset B \quad \text{y} \quad m(U_\alpha) \geq cm(B).$$

Es decir, U_α está contenido en B pero su medida es *comparable* con la medida de B. Por ejemplo, la familia de todos los cubos que contienen $\bar{x}$ decrece regularmente a $\bar{x}$. Sin embargo, este no es el caso para la familia de todos los rectángulos que contienen a $\bar{x}$ (¿por qué?).

El objetivo de este ejercicio es probar que el teorema de diferenciación de Lebesgue continúa siendo válido si en lugar de bolas se consideran familias que decrecen regularmente. Es decir, se pide probar lo siguiente:

Sea f localmente integrable en $\mathbb{R}^d$. Supongamos que $\{U_\alpha\}_\alpha$ es una familia de mebibles que decrece regularmente a $\bar{x}$, con $\bar{x}$ contenido en el conjunto de Lebesgue de f. Entonces

$$\lim_{\substack{m(U_\alpha)\to 0 \\ x\in U_\alpha}} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(y)\,dy = f(\bar{x}).$$

6. Sea $F \subset \mathbb{R}$ un cerrado y $\delta(x) := d(x, F)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que $\delta(x+y)/|y| \to 0$ cuando $|y| \to 0$, para c.t.p. $x \in F$.

(Sugerencia: Tomar $x \in F$ punto de densidad.)

7. $(*)$ Decimos que $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ es un *cubrimiento regular* de $E \subset \mathbb{R}^d$ si se cumple que:

   (i) Existe $c > 0$ tal que para todo $\alpha \in \mathcal{I}$ se cumple que existen bolas B_α^1, B_α^2 de $\mathbb{R}^d$ tal que $B_\alpha^1 \subset U_\alpha \subset B_\alpha^2$ y se tiene que $m(B_\alpha^1) > cm(B_\alpha^2)$.

   (ii) Para todo $x \in E$ y $\eta > 0$ se cumple que existe $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_\alpha$ y $m(U_\alpha) < \eta$.

   (iii) Se cumple que U_α es abierto y $m(\partial U_\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \mathcal{I}$.

Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ medible tal que $0 < m(E) < \infty$ y $\mathcal{U}$ un cubrimiento regular de E. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia disjunta numerable $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots \in \mathcal{U}$ tal que

$$m(E \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i)) = 0 \quad y \quad \sum_{i=1}^{\infty} m(U_i) \leq (1+\varepsilon)m(E)$$

8. $(*)$ Llamamos *base de Vitali*[1] a una familia de subconjuntos abiertos $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n>0}$ de $\mathbb{R}^d$ cuyos diametros tienden a 0 y de forma tal que $d(\{0\}, V_n) \xrightarrow{n} 0$. Dado un conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^d$ definimos los *puntos de densidad respecto a $\mathcal{V}$* como:

$$D_{\mathcal{V}}(A) := \Big\{x \in \mathbb{R}^d : \lim_n \frac{m(A \cap (V_n + x))}{m(V_n)} = 1\Big\}.$$

[1]Nota: Los nombres asignados en este ejercicio no son universales. Por favor no repetir :).

Decimos que una base de Vitali es de *Lebesgue-Vitali* si se cumple que $m(A\Delta D_{\mathcal{V}}(A)) = 0$ para todo A medible. Denotamos $D(A)$ al conjunto de puntos de densidad de Lebesgue definidos como los $x \in \mathbb{R}^d$ tales que:

$$\lim_{r\to 0} \frac{m(A\cap B(x,r))}{m(B(x,r))} = 1.$$

donde $B(x,r)$ denota la bola de centro x y radio r en $\mathbb{R}^d$.

a) Mostrar que la base $\mathcal{V} = \{B(0, \frac{1}{n})\}$ cumple que $D_{\mathcal{V}}(A) = D(A)$ para todo $A \subset \mathbb{R}^d$ medible. En particular, es una base de Lebesgue-Vitali.

b) Sea $\mathcal{V} = \{B(0, r_n)\}_{n>0}$ base de Vitali con $(r_n)_n$ decreciente. Mostrar que $D_{\mathcal{V}}(A) = D(A)$ para todo $A \subset \mathbb{R}^d$ medible si y solo si existe $\delta \in (0,1)$ tal que $r_{n+1} > \delta r_n$ para todo $n > 1$. ¿Se cumple que $\mathcal{V}$ es una base de Lebesgue-Vitali para cualquier sucesión $(r_n)_n$ decreciente?

c) Mostrar que si dos bases de Vitali $\mathcal{V} = \{V_n\}$ y $\mathcal{W} = \{W_n\}$ cumplen que $\frac{m(V_{n+1})}{m(V_n)}$ y $\frac{m(W_{n+1})}{m(W_n)}$ están acotadas por debajo por $\delta > 0$ y se cumple que para todo $n > 0$ existe $k > 0$ tal que $V_{n+k} \subset W_n$ y $W_{n+k} \subset V_n$ entonces $D_{\mathcal{V}}(A) = D_{\mathcal{W}}(A)$ para todo conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^d$.

d) Mostrar que la base de rectángulos $\mathcal{R} = \{[0, a_n] \times [0, b_n]\}$ con $a_n = \sigma^n$ y $b_n = \eta^n$ con $0 < \sigma \leq \eta < 1$ es una base de Lebesgue-Vitali. Comparar con [Problema 8, Cap. 3 [RA]].

e) ($*$) Construir una base de Vitali que no sea de Lebesgue-Vitali. (Sugerencia: Buscar en internet sobre el *Nykodym set* y el *Kakeya needle problem.*)

9. ($*$) (**Teorema de cubrimiento de Besicovitch-Problema 3 Cap. 3 [RA]**) Para todo $d \geq 1$ existe $C_d \geq 1$ tal que si $E \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto acotado y $\mathcal{B}$ es un cubrimiento por bolas de E tal que para todo $x \in E$ hay al menos una bola en $\mathcal{B}$ centrada en x, entonces, existen $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{C_d} \subset \mathcal{B}$ subfamilias finitas con las propiedades siguientes:

   - cada subfamilia $\mathcal{B}_i$ cumple que sus elementos son disjuntos,
   - todo punto $x \in E$ pertenece a al menos una bola de alguna de las subfamilias.

10. Sea $S^1 = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ y sea $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Consideramos $f : S^1 \to S^1$ dado por $f(x) = x+\theta(\text{mod}1)$.

    a) Mostrar que f es un homeomorfismo que preserva la medida de Lebesgue y que para todo $x \in S^1$ la *órbita* de x (i.e. el conjunto $\{f^n(x)\}_n$) es densa en S^1. (Sugerencia: Por absurdo, suponer que existe un intervalo abierto $I \subset S^1$ que es una componente conexa de $S^1 \setminus \overline{\{f^n(x)\}_n}$. Probar que es *periódico* (i.e. $f^n(I) = I$ para cierto $n \neq 0$). Deducir que esto implica que θ es racional.)

    b) Sea $E \subset S^1$ medible y sea $h_r : S^1 \to [0,1]$ definida por $h_r(x) = \frac{m(E\cap(x-r,x+r))}{2r}$. Mostrar que h_r es continua para todo r.

    c) Usar la primera parte para deducir que si E es *f-invariante* (i.e. $f(E) \subset E$) entonces h_r es constante para todo r.

    d) Deducir que f es *ergódica* (i.e. que todo conjunto medible f-invariante mide 0 o 1).

    e) Mostrar que si $\varphi \in L^1(S^1)$ cumple que $\varphi \circ f = \varphi$ m-ctp, entonces φ es constante m-ctp.