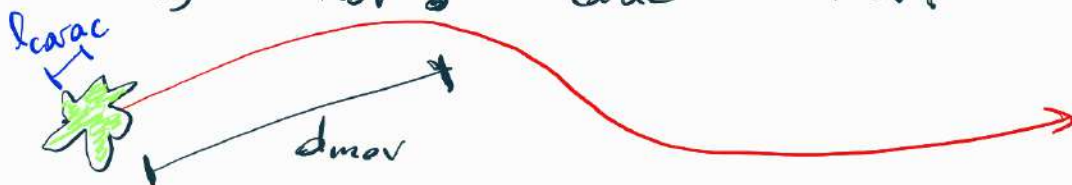


I.2 - cinemática de la partícula

Comenzamos, entonces, el estudio del movimiento de los cuerpos considerando a estos como partículas.

Esto tiene sentido solamente si las longitudes características del cuerpo l_{carac} son mucho menores que las distancias involucradas en los movimientos $d_{mov} \gg l_{carac} \ll d_{mov}$.



Esto es más bien impreciso, el grado de validez de aproximar (considerar) un cuerpo con dimensiones como una partícula dependerá del grado de precisión de nuestras mediciones.

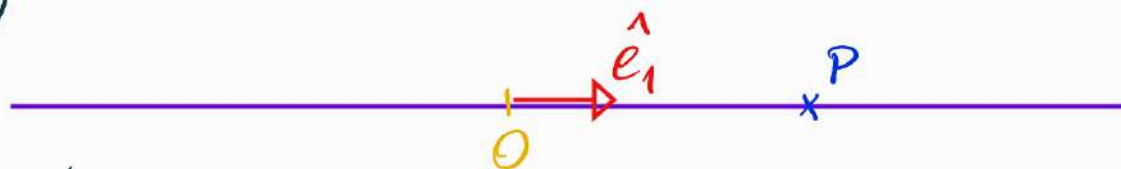
Por ejemplo, si medimos con la precisión de km el movimiento de un auto en una carretera, claramente podemos despreciar sus dimensiones.

De todas formas, nos centramos ahora en el movimiento de una partícula.

I.2.A - conceptos básicos: posición, velocidad y aceleración

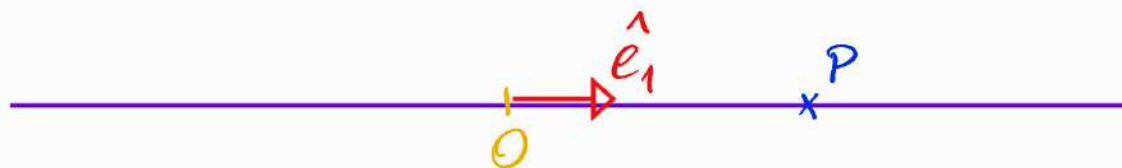
Si tuvieramos una única dimensión, para medir el movimiento de la partícula P tomamos un punto de referencia O respecto al cual mediremos las distancias

Asignaremos un sentido mediante la inclusión de un versor $\hat{e}_1$



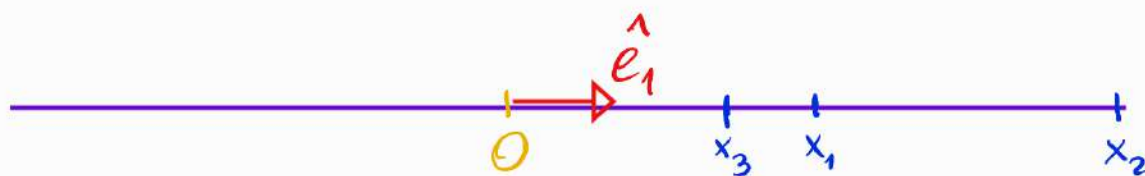
Con esta prescripción podemos asignar como coordenada para la posición de una partícula P la cantidad de unidades

básicas (metros, pulgadas, años-luz, etc) que debemos movernos en el sentido $\hat{e}_1$ para ir de O a P .



de esta forma si la coordenada es $x \Rightarrow$ la posición será $\vec{r}_p = x\hat{e}_1$. Esto tiene implícito que la posición está medida respecto del punto O .

Para caracterizar el movimiento podemos realizar una serie de mediciones $x_1, x_2, x_3, \dots$



generamos una tabla (si queremos):

etiqueta	x (cm)
x_1	10
x_2	20
x_3	7

Definición: Definimos el desplazamiento $\Delta\vec{r}_{l \rightarrow n}$ entre las mediciones l y n como la diferencia vectorial de las posiciones:

$$\Delta\vec{r}_{l \rightarrow n} = \vec{r}_n - \vec{r}_l = x_n \hat{e}_1 - x_l \hat{e}_1 = (x_n - x_l) \hat{e}_1 = \Delta x_{l \rightarrow n} \hat{e}_1$$

6. Como podemos mejorar nuestra caracterización/descripción del movimiento?

Podemos registrar, además de las posiciones en las mediciones, el tiempo en que estas fueron realizadas.

Para esto debemos establecer también un instante de referencia al que le asignemos el tiempo 0. Este podría ser, por ejemplo, la primer medición.

Luego, las siguientes mediciones ocurrirán en el tiempo que t medido en las unidades básicas de nuestra preferencia (segundos, días, años, etc.)

De esta forma podemos mejorar la tabla a:

etiqueta	x (cm)	t (s)
x_1	10	0
x_2	20	3
x_3	7	8

Esto nos da información de la tasa de cambio de la posición o rapidez del movimiento

Esta información la expresamos mediante la velocidad

Definición: La velocidad media entre las medidas l y n se define como el cociente del desplazamiento y el intervalo de tiempo entre las medidas l y n :

$$\vec{v}_{m, l \rightarrow n} = \frac{\vec{r}_n - \vec{r}_l}{t_n - t_l} = \frac{\Delta x_{l \rightarrow n}}{\Delta t_{l \rightarrow n}} \hat{e}_1 = v_{m, l \rightarrow n} \hat{e}_1$$

6. ¿Cómo podríamos mejorar esta descripción?

con más mediciones y de forma más frecuente. Si tuviéramos más mediciones con intervalos de tiempo arbitrariamente chicos de forma de conocer la posición en cualquier instante de tiempo e indexamos la posición por el tiempo en que se realiza la medida en lugar de por el número de medida. Es decir, pasamos de $\vec{r}_i$ a $\vec{r}(t_i)$.

Definición: Definimos entonces la velocidad en el instante de tiempo t como la velocidad media en el límite en que la separación temporal de las mediciones tiende a 0 y estas ocurren en el tiempo t :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{t + \Delta t - t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \hat{e}_1 = \frac{dx}{dt} \hat{e}_1 = v_1(t) \hat{e}_1$$

Análogamente a como definimos la velocidad media con las variaciones de las posiciones, podemos realizar lo mismo con las variaciones de velocidades

Definición: La aceleración media en el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2 es el cociente entre la diferencia de velocidades en los tiempos t_1 y t_2 y la diferencia de tiempos:

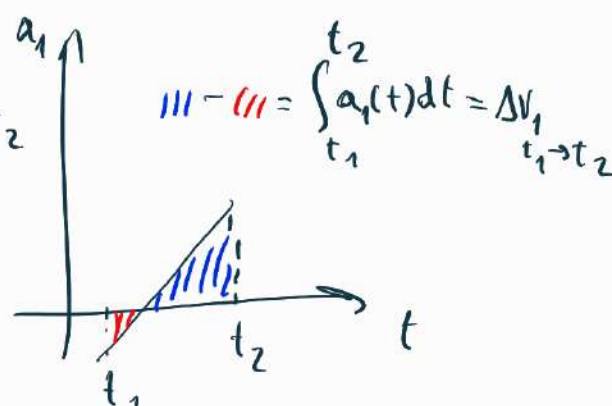
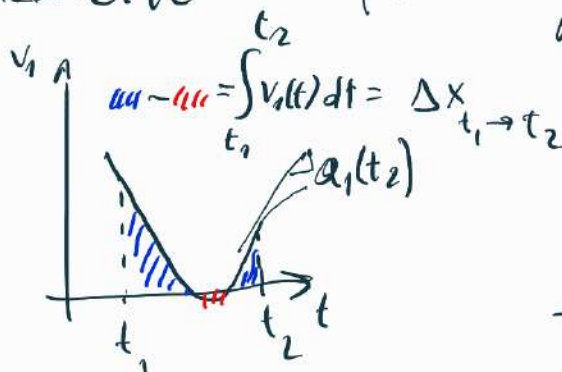
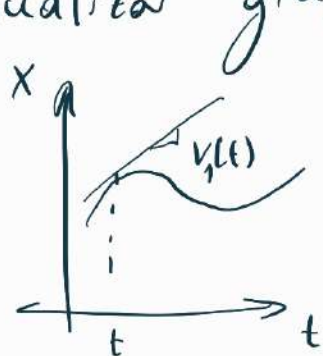
$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_{t_1 \rightarrow t_2}}{\Delta t_{t_1 \rightarrow t_2}} \hat{e}_1$$

Definición: La aceleración en el instante de tiempo t se define como la aceleración media en el intervalo de tiempo entre t y $t + \Delta t$ en el límite en que $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{t + \Delta t - t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1(t + \Delta t) - v_1(t)}{\Delta t} \hat{e}_1 = \frac{dv_1}{dt} \hat{e}_1 = \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{e}_1 = a_1(t) \hat{e}_1$$

Podríamos iterar este procedimiento, pero no ganaríamos nada. Spoiler: la 2^{da} ley de Newton relaciona las fuerzas con la aceleración.

Las relaciones entre $x(t)$, $v_1(t)$ y $a_1(t)$ se pueden visualizar gráficamente de forma sencilla:



En 3 dimensiones la situación es bastante similar. Definimos la posición fijando un punto de referencia O en el referencial y 3 versores ortonormales $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ formando una base directa y fijos en el referencial.

La posición de una partícula P la fijamos midiendo cuantas unidades básicas debemos movernos en el sentido de cada uno de los versores para ir de O a P . De esta forma es:

$$\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 \quad (\text{si } \hat{e}_1 = \hat{i}, \hat{e}_2 = \hat{j}, \hat{e}_3 = \hat{k} \\ x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z \\ \text{esto es lo que acostumbramos})$$

El desplazamiento entre las medidas l y n lo definimos de igual forma como:

$$\Delta \vec{r}_{l \rightarrow n} = \vec{r}_l - \vec{r}_n = (x_{1n} \hat{e}_1 + x_{2n} \hat{e}_2 + x_{3n} \hat{e}_3) - (x_{1l} \hat{e}_1 + x_{2l} \hat{e}_2 + x_{3l} \hat{e}_3) \\ = (x_{1n} - x_{1l}) \hat{e}_1 + (x_{2n} - x_{2l}) \hat{e}_2 + (x_{3n} - x_{3l}) \hat{e}_3 = \Delta x_{1, l \rightarrow n} \hat{e}_1 + \Delta x_{2, l \rightarrow n} \hat{e}_2 + \Delta x_{3, l \rightarrow n} \hat{e}_3$$

Con la misma definición la velocidad media entre las medidas l y n es:

$$\vec{v}_{m, l \rightarrow n} = \frac{\Delta \vec{r}_{l \rightarrow n}}{\Delta t_{l \rightarrow n}} = \frac{\Delta x_{1, l \rightarrow n}}{\Delta t_{l \rightarrow n}} \hat{e}_1 + \frac{\Delta x_{2, l \rightarrow n}}{\Delta t_{l \rightarrow n}} \hat{e}_2 + \frac{\Delta x_{3, l \rightarrow n}}{\Delta t_{l \rightarrow n}} \hat{e}_3 = v_{m, l \rightarrow n}^1 \hat{e}_1 + v_{m, l \rightarrow n}^2 \hat{e}_2 + v_{m, l \rightarrow n}^3 \hat{e}_3$$

De la misma forma la velocidad instantánea al tiempo t se encuentra como el límite de la velocidad media cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y es:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_1(t+\Delta t) - x_1(t)}{\Delta t} \hat{e}_1 + \frac{x_2(t+\Delta t) - x_2(t)}{\Delta t} \hat{e}_2 + \frac{x_3(t+\Delta t) - x_3(t)}{\Delta t} \hat{e}_3 \\ = \frac{dx_1}{dt} \hat{e}_1 + \frac{dx_2}{dt} \hat{e}_2 + \frac{dx_3}{dt} \hat{e}_3 = v_1(t) \hat{e}_1 + v_2(t) \hat{e}_2 + v_3(t) \hat{e}_3$$

Nuevamente, la aceleración media se generaliza a

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_{t_1 \rightarrow t_2}} \hat{e}_1 + \frac{\Delta v_2}{\Delta t_{t_1 \rightarrow t_2}} \hat{e}_2 + \frac{\Delta v_3}{\Delta t_{t_1 \rightarrow t_2}} \hat{e}_3$$

y finalmente la aceleración en el instante de tiempo t se define como el límite de la aceleración media cuando $t_2 \rightarrow t_1 = t$.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1(t+\Delta t) - v_1(t)}{\Delta t} \hat{e}_1 + \frac{v_2(t+\Delta t) - v_2(t)}{\Delta t} \hat{e}_2 + \frac{v_3(t+\Delta t) - v_3(t)}{\Delta t} \hat{e}_3 \\ = \frac{dv_1}{dt} \hat{e}_1 + \frac{dv_2}{dt} \hat{e}_2 + \frac{dv_3}{dt} \hat{e}_3 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \hat{e}_1 + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \hat{e}_2 + \frac{d^2 x_3}{dt^2} \hat{e}_3 = a_1(t) \hat{e}_1 + a_2(t) \hat{e}_2 + a_3(t) \hat{e}_3$$

Habiendo definido las magnitudes vectoriales básicas de la descripción del movimiento de una partícula, pasamos a definir dos conceptos frecuentes.

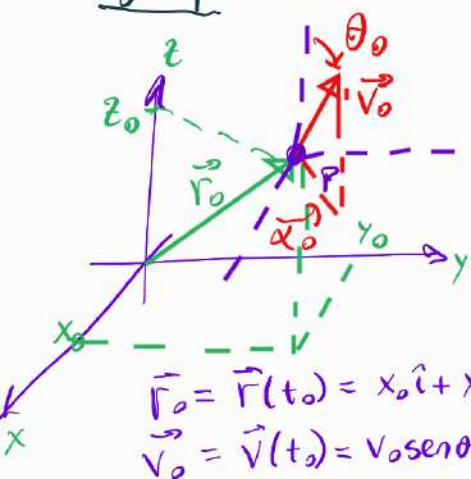
Definición: Se define la trayectoria de una partícula como el conjunto de puntos del espacio por los que transita.

Definición: La ley horaria de una partícula es la función que da cuenta de la evolución temporal de la partícula: $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Por ejemplo, en un movimiento circular la trayectoria es el círculo y la trayectoria es la dependencia temporal de la posición de la partícula.

Ejemplo: Hallar la ley horaria en un movimiento proyectil.



La aceleración es $\vec{a} = -g\hat{k}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t) \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = 0 & \text{(I)} \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = 0 & \text{(II)} \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = -g & \text{(III)} \end{cases}$$

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) = v_0 \sin \theta_0 \cos \alpha_0 \hat{i} + v_0 \sin \theta_0 \sin \alpha_0 \hat{j} + v_0 \cos \theta_0 \hat{k}$$

$$v_x(t) = v_x(t_0) = v_0 \sin \theta_0 \cos \alpha_0$$

Luego es $\frac{dx}{dt} = v_x(t)$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{dx}{dt'} dt' = \int_{t_0}^t v_x(t') dt' = v_x(t_0) \int_{t_0}^t dt' = v_x(t_0) [t - t_0]$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + v_x(t_0) [t - t_0] \\ x(t) &= x_0 + v_0 \sin \theta_0 \cos \alpha_0 [t - t_0] \end{aligned}$$

(I) $\rightarrow \int_{t_0}^t \frac{dv_x}{dt'} dt' = \int_{t_0}^t 0 dt' = 0$

cambio de variable de $t' \rightarrow v_x'(t')$

$$\Rightarrow dv_x' = \frac{dv_x'}{dt'} dt'$$

$$\int_{v_x(t_0)}^{v_x(t)} dv_x' = v_x(t) - v_x(t_0)$$

Análogamente con (II) es

$$v_y(t) = v_y(t_0) = v_0 \sin \theta_0 \sin \alpha_0$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin \theta_0 \sin \alpha_0 [t - t_0]$$

Finalmente es $v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^t a_z(t') dt' = v_0 \cos \theta_0 - g \int_{t_0}^t dt' = v_0 \cos \theta_0 - g [t - t_0]$

y $z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z(t') dt' = z_0 + v_0 \cos \theta_0 [t - t_0] - g \int_{t_0}^t [t' - t_0] dt' = z_0 + v_0 \cos \theta_0 [t - t_0] - \frac{g}{2} [t - t_0]^2$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (x_0 + v_0 \sin \theta_0 \cos \alpha_0 [t - t_0], y_0 + v_0 \sin \theta_0 \sin \alpha_0 [t - t_0], z_0 + v_0 \cos \theta_0 [t - t_0] - \frac{g}{2} [t - t_0]^2)$$

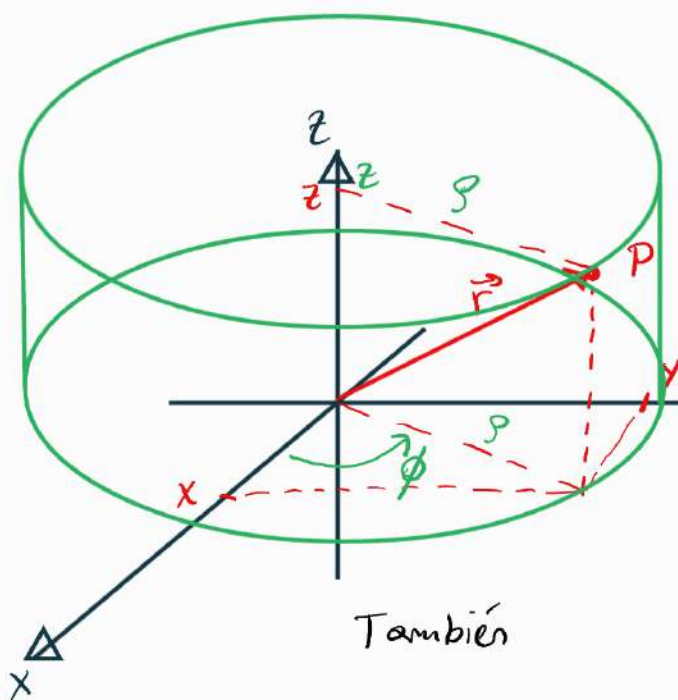
I.2.B - Sistemas de coordenadas

En muchas ocasiones es útil elegir sist. de coordenadas que exploten ciertas simetrías o características del movimiento.

A continuación presentamos 3 de tales sist. de coordenadas:

Coordenadas cilíndricas

En lugar de utilizar las variables (x, y, z) utilizaremos las variables (ρ, ϕ, z) . Estas coord. se definen pensando a la partícula en la superficie de un cilindro centrado en el origen y con su eje coincidente (típicamente) con el eje z .



En estas coordenadas es:

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$z = z$$

Definimos versores unitarios asociados a una coordenada cualquiera η como:

$$\hat{e}_\eta \equiv \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}\right)_{\text{otros coord.}}}{\left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}\right)_{\text{otros coord.}}\right|}$$

Es decir, $\hat{e}_\eta$ es un vector de módulo 1 cuyo sentido es el del cambio de la posición cuando varía únicamente la coordenada η

De esta forma es:

$$\hat{e}_\rho = \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right)_{\phi, z}}{\left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right)_{\phi, z}\right|} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)_{\phi, z} \hat{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)_{\phi, z} \hat{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)_{\phi, z} \hat{k}}{\left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right)_{\phi, z}\right|} = \frac{\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}}{\sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}$$

$$\hat{e}_\phi = \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right)_{\rho, z}}{\left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right)_{\rho, z}\right|} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)_{\rho, z} \hat{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)_{\rho, z} \hat{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)_{\rho, z} \hat{k}}{\left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right)_{\rho, z}\right|} = \frac{-\rho \sin \phi \hat{i} + \rho \cos \phi \hat{j}}{\sqrt{(-\rho \sin \phi)^2 + (\rho \cos \phi)^2}} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

$$\hat{e}_z = \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right)_{\rho, \phi}}{\left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right)_{\rho, \phi}\right|} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_{\rho, \phi} \hat{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{\rho, \phi} \hat{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)_{\rho, \phi} \hat{k}}{\left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right)_{\rho, \phi}\right|} = \hat{k}$$

En resumen es

$$\begin{aligned}\hat{e}_\rho &= \cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j} \\ \hat{e}_\phi &= -\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j} \\ \hat{e}_z &= \hat{k}\end{aligned}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \rho \cos\phi \hat{i} + \rho \sin\phi \hat{j} + z\hat{k} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z$$

Como los versores en este sistema de coord. no están fijos en el referencial, los mismos variarán en el tiempo.

Notemos además que $\hat{e}_\rho$ y $\hat{e}_\phi$ son únicamente funciones de ϕ .

$$\Rightarrow \frac{d\hat{e}_\rho(\phi)}{dt} = \frac{d\hat{e}_\rho}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} [-\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}] = \dot{\phi} \hat{e}_\phi$$

$$\frac{d\hat{e}_\phi(\phi)}{dt} = \frac{d\hat{e}_\phi}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} [-\cos\phi \hat{i} - \sin\phi \hat{j}] = -\dot{\phi} \hat{e}_\rho$$

$$\frac{d\hat{e}_z}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = 0$$

y por lo tanto es:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \hat{e}_\rho + \rho \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt} \hat{e}_z + z \frac{d\hat{e}_z}{dt} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho} \hat{e}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \ddot{\phi} \hat{e}_\phi - \rho \dot{\phi}^2 \hat{e}_\rho + \ddot{z} \hat{e}_z = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z$$

Ejercicio 1.7.a

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R \hat{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = 0, \rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} = 0, \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 = -\omega^2 R$$

$$\Rightarrow \ddot{z}(t) = \ddot{z}(t) = \ddot{z}(0) + \int_0^t 0 dt' = \ddot{z}(0) \Rightarrow z(t) = z_0 + v_0 t$$

$$\Rightarrow [\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} = 0] \rho \rightarrow \rho^2 \ddot{\phi} + 2\rho \dot{\rho}\dot{\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d(\rho^2 \dot{\phi})}{dt} = 0 \Rightarrow \rho^2 \dot{\phi} = \text{cte} = \rho^2 \dot{\phi} \Big|_{t=0} = R^2 \omega \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{R^2 \omega}{\rho^2}$$

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 = -\omega^2 R \Rightarrow \ddot{\rho} - \rho \left(\frac{R^2 \omega^2}{\rho^4} \right) = -\omega^2 R \Rightarrow \ddot{\rho} = \omega^2 R \left[\frac{R^3}{\rho^3} - 1 \right]$$

pero en $t=0$ es $\rho = R \Rightarrow \ddot{\rho} = 0 \Rightarrow \dot{\rho} = \text{cte} = \dot{\rho} \Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow \rho = \text{cte} = \rho \Big|_{t=0} = R$
al menos inicialmente

$$\Rightarrow \ddot{\rho} = 0 \quad \forall t \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \quad \forall t \Rightarrow \rho = R \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \omega \quad \forall t \Rightarrow \phi = \omega t + \phi_0$$

Ley horaria

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = R \cos(\omega t + \phi_0) \hat{i} + R \sin(\omega t + \phi_0) \hat{j} + (v_0 t + z_0) \hat{k}$$

