

Anexo Teórico - Práctico1

MOVIMIENTO BROWNIANO

Sección Biofísica

Facultad de Ciencias, Universidad de la República

MOVIMIENTO BROWNIANO

En 1827 el biólogo y botánico Robert Brown observó que partículas suficientemente pequeñas dispersas en un fluido experimentan una continua agitación o vibración, fenómeno que se conoce hoy como “movimiento browniano” en honor a dicho investigador.

Originalmente observado a partir de preparados frescos, una primera interpretación asoció este fenómeno a la presencia de una “fuerza vital” propia de los seres vivos. Más tarde, esto fue descartado al poder constatarse dicho fenómeno en muestras de origen mineral. El mismo Brown en “*The miscellaneous botanical works of Robert Brown*”, Volumen 1 (1828), comenta:

“En plantas, ya sea secas o sumergidas en alcohol solo por unos pocos días, las partículas de polen de ambos tipos se encontraron en movimiento igualmente evidente al de aquellas observadas en la planta viva; especímenes de varias plantas, algunas de las cuales se habían secado y conservado en un herbario durante más de veinte años, y otras no menos de un siglo, todavía exhibían las moléculas o partículas esféricas más pequeñas en números considerables, y en movimiento evidente, junto con unas pocas de las partículas más grandes, cuyos movimientos eran mucho menos manifiestos, y en algunos casos no observables.”

Las observaciones originales sugerían entonces que el movimiento es más acentuado cuanto menor es el tamaño de las partículas. Por ejemplo, partículas de diámetro medio superior a los $4\ \mu\text{m}$ no presentan este movimiento, pero es muy notable cuando las dimensiones de las partículas son del orden de $0,1\ \mu\text{m}$. También es conocido que el movimiento browniano depende de la viscosidad del fluido, disminuyendo el movimiento de la partícula a medida que aumenta la viscosidad del medio de dispersión. Por otra parte, el movimiento browniano no se debe a la agitación mecánica, corrientes de convección u otros desplazamientos generales del fluido, pero sí depende de la temperatura.

Tomando en cuenta estas características, a mediados del siglo XIX se llegó a la hipótesis de que el movimiento browniano de las partículas dispersas en un fluido sería una consecuencia del impacto constante de las moléculas del medio de dispersión sujetas a agitación térmica. Así, un grano de polen o de polvo suspendido en un fluido se verá sometido al bombardeo continuo de las moléculas del mismo. Este es, por tanto, un fenómeno con un doble carácter aleatorio. Por un lado, el desplazamiento de la partícula en suspensión resulta impredecible en cada instante, y por otro, el movimiento de las moléculas del fluido debido a la agitación térmica también es aleatorio.

El movimiento que presentan estas partículas “brownianas” es completamente irregular, y a su vez independiente de otras partículas de la misma especie en suspensión, aún de las más próximas.

Los aportes de Einstein

Interesado en buscar comprobar la teoría atómica de la materia para los líquidos, en 1905 Albert Einstein vislumbró que, si un líquido estaba compuesto por moléculas sujetas a agitación térmica, una partícula en suspensión de un tamaño adecuado se vería sometida a un movimiento errático. Este movimiento sería producto de una fuerza aleatoria, cuya magnitud y sentido varía en cada instante, ya que es la resultante de los choques al azar de las moléculas del líquido. Este movimiento que Einstein imaginó, realmente existía, y era el movimiento browniano.

El joven Einstein, que para entonces tenía 26 años y trabajaba como empleado en una oficina de patentes en Berna, publicó en ese año mágico de 1905, además de su trabajo sobre el movimiento browniano, su teoría de la relatividad especial, las investigaciones sobre el efecto fotoeléctrico que le merecerían el premio Nobel de Física, su tesis de doctorado sobre la determinación del tamaño de las moléculas y un artículo que contenía su famosa expresión de equivalencia entre la masa y la energía. Todas estas investigaciones que revolucionaron la física las efectuó en sus ratos libres.

Einstein había antes estudiado, y publicado en tres artículos, su desarrollo de la termodinámica a partir de la estadística de las propiedades mecánicas de las moléculas. En esta misma línea se dio cuenta que este movimiento, que postulaba que debían presentar las partículas en suspensión en un líquido, era capaz de ser estudiado en base a medidas estadísticas del desplazamiento de las partículas.

La teoría de Einstein fue corroborada por los trabajos experimentales de Jean Perrin en 1912, a partir de observaciones del movimiento browniano al microscopio óptico como las realizadas en el Práctico, pero en condiciones controladas. Debido a que el microscopio solamente permite ver los efectos de fluctuaciones de cierta magnitud en la posición de las partículas, el movimiento observado sólo insinúa la complejidad de la trayectoria real (Figura 1)¹. La longitud de los segmentos rectilíneos que unen las posiciones entre dos observaciones sucesivas, es mayor cuanto mayor sea el intervalo del tiempo de observación.

¹La trayectoria de una partícula en movimiento browniano fue uno de los primeros fenómenos naturales en los que se reconoció una autosemejanza al ser observada a distintos aumentos, una propiedad clave de los objetos geométricos que Benoit B. Mandelbrot ha denominado fractales.

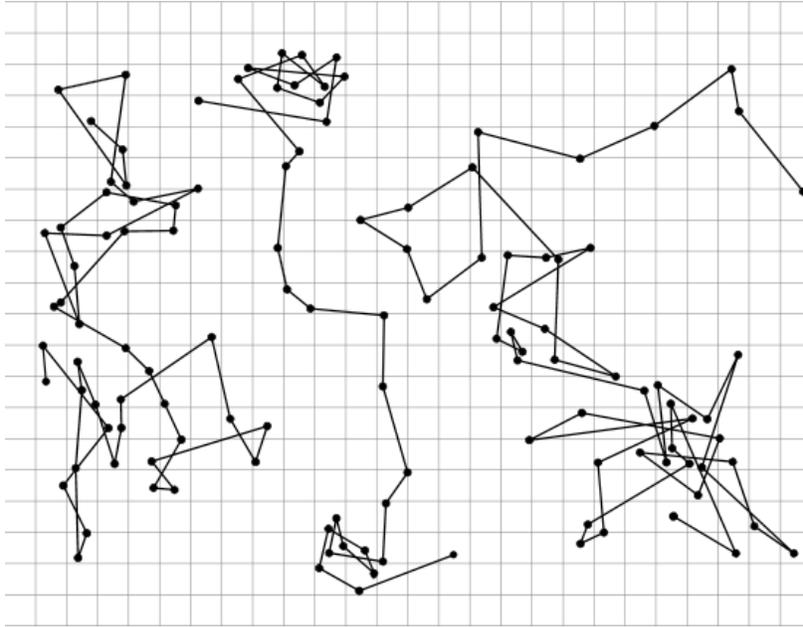


Figura 1: Proyección sobre el plano horizontal de los segmentos que unen posiciones sucesivas de partículas de igual radio ($0,53 \mu\text{m}$). Las posiciones son registradas cada 30 segundos. Dieciséis espacios equivalen a 50 micras. Más allá de su representación bidimensional, debe recordarse que el fenómeno es tridimensional. Reproducido de "Atoms" (Perrin, 1916).

Análisis estadístico del movimiento de una partícula browniana

Dos medidas estadísticas utilizadas para caracterizar el movimiento de una partícula browniana son el "desvío cuadrático medio" y el "desplazamiento medio". Para definirlos atenderemos a la "poligonal" definida por las posiciones de una partícula browniana a intervalos de tiempo constantes (Figura 2). Se mide la longitud de la proyección horizontal de las sucesivas posiciones de la partícula en cada intervalo de tiempo t .

Debido a que una partícula browniana presenta igual probabilidad de moverse en cualquier dirección, el valor esperado para el promedio de la posición proyectada sobre el eje de abscisas en el tiempo es cero ($\bar{X} = 0$). Como es claro, la posición media resulta poco informativa, puesto que es igual para distintas partículas en distintos medios. Dando un paso más en el análisis estadístico del fenómeno, podemos evaluar cuánto se alejan las sucesivas posiciones de las partículas respecto de su posición media. Estos desvíos serán tanto positivos como negativos con igual probabilidad, y dado que es nuestro interés considerar su magnitud y no su dirección, serán todos elevados al cuadrado (esto permite trabajar solamente con valores positivos). Luego, simplemente se toma el promedio de estos cuadrados. Así se obtiene el desvío cuadrático medio ($\overline{X^2}$).

$$\overline{X^2} = \frac{(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)}{n} = \frac{\sum_n X_i^2}{n} \quad (1)$$

Así construido, el “desvío cuadrático medio” es la definición de la varianza de la posición (σ^2), calculada para $\bar{X} = 0$. La varianza es una medida de cuánto se dispersan las observaciones con respecto al valor medio y se define como $\sigma^2 \equiv \frac{\sum_N (\bar{X} - X_i)^2}{N}$. La deducción de la relación entre la varianza de la posición y el desvío cuadrático medio es elemental.

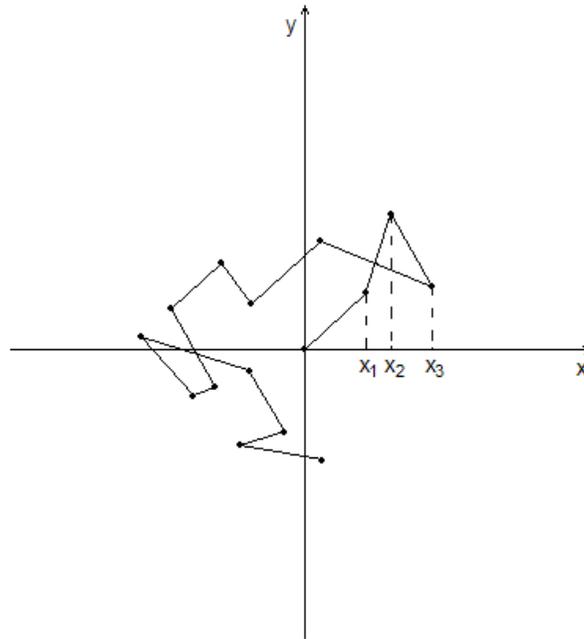


Figura 2: Ejemplo de registro de la posición de una partícula browniana sobre un plano horizontal a intervalos regulares de tiempo. Se indican las proyecciones sobre el eje x de algunos desplazamientos.

El desvío cuadrático medio tiene dimensiones de longitud al cuadrado, es decir, dimensiones de área. Resulta de gran interés obtener una medida con dimensiones de longitud, que sea útil como una medida del “desplazamiento” esperado respecto de su posición media. Así, al tomar la raíz cuadrada del desvío cuadrático medio, se tiene el desplazamiento medio ($\sqrt{\overline{X^2}}$). Aquí se advierte, por tanto, que el desplazamiento medio se corresponde con el desvío estándar de la posición (σ), una medida que se obtiene directamente como la raíz cuadrada de la varianza. El desplazamiento medio no tiene una notación particular y será representado de esta forma habitualmente.

Las observaciones disponibles predecían que $\overline{X^2}$ variaba proporcionalmente con el tiempo, y al momento que Einstein desarrolló su trabajo sobre el movimiento browniano, dedujo que efectivamente:

$$\overline{X^2} = 2Dt \quad (2)^2$$

donde D es el coeficiente de difusión y t el tiempo. Einstein llegó a predecir que el desplazamiento radial de una partícula que difunde en cualquier dirección a partir de un punto central “no era proporcional al tiempo, sino a la raíz cuadrada del tiempo”.

De este hecho se deduce que el desplazamiento medio depende del tiempo como sigue:

$$\sqrt{\overline{X^2}} = \sqrt{2Dt} \quad (3)$$

Esta relación de proporcionalidad entre el desplazamiento medio y la raíz cuadrada del tiempo tiene consecuencias profundas para los organismos vivos, imponiendo restricciones al tamaño de los mismos.

Constante de Difusión

La constante de difusión describe la facilidad con la que una cierta partícula difunde en un medio particular. Es una propiedad que depende por tanto de las características de la partícula y del medio en cuestión. Además, depende de la temperatura del sistema. Este es el parámetro que aparece en las leyes de Fick, las cuales describen cuantitativamente el fenómeno macroscópico de la difusión.

Las medidas de la constante de difusión han mostrado que ésta es independiente de la concentración para soluciones diluidas.

Para partículas esféricas de radio r , en un medio de viscosidad η y temperatura T , Einstein dedujo la siguiente expresión para el coeficiente de difusión:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r} = \frac{RT}{N_A 6\pi\eta r} \quad (4)$$

Donde k_B es la constante de Boltzmann, que equivale al cociente entre la constante de los gases ideales y el Número de Avogadro ($k_B = R/N_A$), y tiene un valor de $1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

²Quienes deseen explorar los detalles de la deducción de la ecuación 2, pueden leer el capítulo XII, *Energía Térmica*, del libro “Entropía para biólogos”, de Harold J. Morowitz (1978), disponible en Biblioteca de Facultad de Ciencias; y también el capítulo 4, *Propiedades cinéticas de los sistemas coloidales*, del libro “Coloides”, de G Villar. Ambos capítulos se encuentran disponibles en el Compendio de Biofísica que pueden encontrar en Subespacio.

Medidas de difusión y el peso molecular de macromoléculas biológicas

Esta constante de difusión es la misma que se encuentra en la pendiente de la relación lineal de la ecuación (1). Esto permitió a Perrin obtener por primera vez, y por la medida de los desplazamientos de partículas sometidas a movimiento browniano, un buen valor para la constante de Avogadro.

Siguiendo el movimiento de una partícula browniana esférica de radio conocido y registrando su posición a intervalos iguales de tiempo, podía representar el promedio del cuadrado del desplazamiento ($\overline{X^2}$) para los distintos intervalos de tiempo de observación. La gráfica así obtenida era una línea recta, cuya pendiente era igual a $2D$. Y a partir de la expresión obtenida por Einstein para la constante de difusión (ecuación 4), se podía despejar del valor de la pendiente el número de Avogadro si la viscosidad del líquido y la temperatura eran conocidas. Alternativamente, conocido el número de Avogadro (o el valor de la constante de Boltzmann), se pudieron utilizar medidas del movimiento browniano como una de las primeras formas de calcular el peso molecular de ciertas macromoléculas globulares en suspensión.

DIFUSIÓN

La difusión es un fenómeno macroscópico espontáneo por el cual una sustancia suspendida o disuelta en un medio fluido experimenta un flujo neto desde puntos de alta concentración hacia puntos de más baja concentración. Este fenómeno tiende a reducir la diferencia entre las concentraciones de esos puntos, puesto que aumenta la concentración en el lugar menos concentrado y la reduce en el lugar más concentrado. Si esta diferencia logra hacerse cero, el flujo neto se detiene y se dice que el sistema ha alcanzado el estado de equilibrio.

Cuantitativamente, el flujo de partículas entre dos puntos de un fluido, definido como la cantidad de partículas que atraviesa una sección por unidad de tiempo y superficie, es directamente proporcional a la diferencia de concentraciones de partículas en ambos puntos. El coeficiente de proporcionalidad es el coeficiente de difusión (D). La relación entre el flujo y la tasa de cambio de la concentración en el espacio se conoce como la 1^{ra} Ley de Fick. Esto conduce a una ecuación diferencial que tiene la forma:

$$J = -D \frac{dc}{dx} \quad (5),$$

donde J es el flujo neto entre dos puntos y dc/dx es el gradiente espacial de concentración entre dichos puntos. Nótese que el signo negativo indica que el

flujo es opuesto al gradiente de concentración, lo cual resulta ser una consecuencia de la 2^{da} Ley de la Termodinámica.

Un rápido análisis de la ecuación 5 confirma que el estado de equilibrio ($J = 0$), implica que el gradiente debe necesariamente ser nulo, por lo que las concentraciones deben ser iguales en todos los puntos.

A partir de esta ecuación se puede deducir la 2^{da} Ley de Fick, conocida como ecuación de difusión, la cual se presenta como una ecuación a derivadas parciales que relaciona la tasa de cambio temporal de la concentración en un punto con la derivada segunda de la concentración en el espacio:

$$\frac{dC}{dt} = D \frac{d^2C}{dx^2} \quad (6)$$

La solución de la ecuación de difusión es una familia de curvas gaussianas. A medida que transcurre el tiempo, la curva adquirirá una anchura mayor y una forma más achatada, manteniendo su máximo en el mismo punto del espacio (Figura 3).

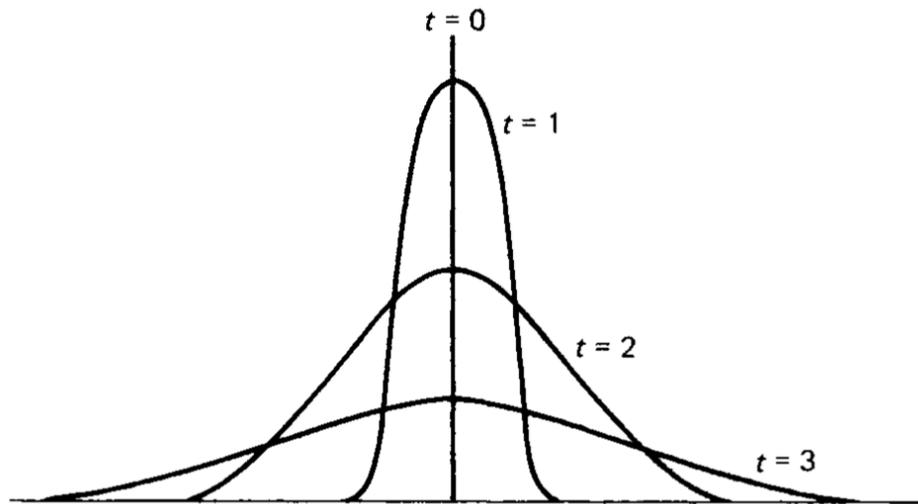


Figura 3: Curvas gaussianas correspondientes a la concentración de un soluto que difunde en función de la posición a diferentes tiempos. Nótese el cambio en las curvas a medida que transcurre el tiempo. Extraído de "Entropía para biólogos" (Morowitz, 1970).

Aunque el fenómeno de difusión es determinístico, tiene explicación a partir de un fenómeno aleatorio: el movimiento browniano. El carácter aleatorio del movimiento browniano de un colectivo de partículas conduce a la aparición de nuevas partículas en zonas de baja concentración (en detrimento del número de partículas en zonas de gran concentración). Obsérvese que mientras que las partículas individuales siguen teniendo la misma probabilidad de desplazarse en cualquier dirección, el conjunto total de partículas (debido a su gran número) se rige por las leyes macroscópicas de la difusión hasta alcanzar el equilibrio. La difusión consiste entonces, en un conjunto de partículas

experimentando movimiento browniano, en el marco de un gradiente de concentración.

La forma en la cual un fenómeno macroscópico determinista se explica a partir de un fenómeno microscópico aleatorio radica en el cambio de escala de observación: el gran número de partículas involucradas determina que el comportamiento general del sistema se aleje muy poco respecto al del promedio temporal de las partículas individuales del mismo (Teoría Ergódica)³.

Bibliografía

B.H. Lavenda (1985). El movimiento browniano. *Investigación y Ciencia*, 103 (abril), 36-45. Disponible en el Compendio de Biofísica.

G. Villar (1963). *Coloides*, Capítulo 4: Propiedades cinéticas de los sistemas coloidales, 39-50. Disponible en el Compendio de Biofísica.

H. J. Morowitz (1978). *Entropía para biólogos*, Capítulo 12: Energía Térmica, 138-148. Disponible en el Compendio de Biofísica.

E. Schrödinger (1944). *¿Qué es la vida?*, Capítulo 1: Perspectiva desde la Física Clásica, 1-10.

Sitios de interés

Wikipedia:

https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_browniano

https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Fick

Libro "Atoms"(Perrin, 1916):

<https://archive.org/stream/atomsper00perruoft#mode/1up>

³Este aspecto central para explicar otros fenómenos físicos y biológicos, es explorado por Erwin Schrödinger de forma muy sencilla en el primer capítulo de su libro *¿Qué es la vida?* (What's life?), de 1944.