Práctico 2: Probabilidad Condicional[1]

Probabilidad Condicional

1. De una urna que contiene 4 bolas blancas y 2 negras se extrae al azar una bola, que luego se pone en una segunda urna, que tiene 3 bolas blancas y 4 negras. Calcular la probabilidad de que una bola extraída de la segunda urna sea blanca.

2. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sucesos arbitrarios, con $\mathbf{P}(\mathbf{A}) > 0$. Demostrar la desigualdad

$$\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) \geq 1 - \frac{\mathbf{P}(\mathbf{B}^c)}{\mathbf{P}(\mathbf{A})}.$$

3. *El dilema del prisionero*
Tres prisioneros A, B y C solicitan libertad condicional. El jurado decide que solo liberará a dos de ellos. Un guardia amigo de A sabe quiénes son pero a A le resulta *anti-ético* (se ve que efectivamente está rehabilitado) preguntarle directamente si él será liberado. Entonces formula el siguiente plan:

> *"Voy a preguntarle al guardia si B es uno de los que será liberado"*

Pero luego reflexiona:

> *"Ahora tengo probabilidad $\frac{2}{3}$ de ser liberado, pero si le pregunto y me dice que B será liberado, entonces tendré probabilidad $\frac{1}{2}$ de ser liberado...Creo que me voy a enfermar de una gastritis al santo botón, así que mejor no le pregunto nada..."*

¿Qué opina de su formulación?

4. En un partido de las eliminatorias, Uruguay debe tirar un penal. Se elige, con equi-probabilidad, quién ejecuta el tiro penal, entre tres jugadores: Suárez, Cavani, y un suplente. La estadística de Suarez cuenta con 97 aciertos de cada 100, la de Cavani con 95 cada 100, y la del suplente con 60 de cada 100.

(a) Calcular la probabilidad de que el tiro se erre.

(b) Si el tiro penal se erra: ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya pateado el suplente?

5. *La ruina del jugador*
Considere un juego que consiste en tirar la moneda de manera sucesiva. En cada paso, el apostador gana \$1 si acierta a la salida de la moneda y pierde \$1 si no. Suponga que un jugador va decidido a ganar m pesos o "perder todo en el intento", es decir, jugar hasta ganar $\$m$ o hasta perder toda la plata que haya llevado (quede arruinado). Sea $p(x)$ la probabilidad de quedar arruinado si llega con $\$x$ (con $0 \leq x \leq m$).

(a) Observar que la probabilidad de quedar arruinado pasa a ser $p(x+1)$ si gana en la primer jugada y $p(x-1)$ si pierde en la primer jugada.

(b) Probar que la función $p(x)$ tiene que verificar que $p(x) = \frac{1}{2}\left[p(x+1) + p(x-1)\right]$ si $1 \leq x \leq m-1$

(c) Deducir que existen C_1 y C_2 tales que $p(x) = C_1 + C_2 x$.

[1] *Para trabajar en la semana 3.*

(d) Como además se tiene que verificar que $p(0) = 1$ (ya que si llega sin plata, no lo dejan jugar) y $p(m) = 0$, deducir que tiene que ser $p(x) = 1 - \frac{x}{m}$. ¿Le parece razonable que dé esto?

Independencia

6. Probar que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son sucesos independientes, entonces $\mathbf{A}^c$ y $\mathbf{B}^c$ también son independientes.

7. Probar que los eventos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes si $\mathbf{P}(\mathbf{B}|\mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{B}|\mathbf{A}^c)$.

8. Investigar si la propiedad de *"ser independientes"* cumple la propiedad transitiva, es decir:

> Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes y $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son independientes, ¿son $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ independientes?

9. Los sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son tales que: $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes; $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ son incompatibles; $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son independientes; $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 0{,}6$, $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 0{,}4$ y $\mathbf{P}(\mathbf{C}) = 0{,}1$. Calcular las probabilidades de los sucesos $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ y $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}^c$.

10. Demostrar que si los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes, y ambos tienen probabilidad positiva, entonces no pueden ser incompatibles.

11. Demostrar que si $\mathbf{A}$ es un suceso arbitrario, y $\mathbf{B}$ es tal que $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 0$, entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes.

12. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sucesos independientes, y tales que $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Demostrar que si $\mathbf{P}(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 1$.

13. La probabilidad de detectar un avión que vuela en una determinada región, por medio de un radar, es 0,9. En esta región operan en forma independiente tres radares. Calcular la probabilidad de que se detecte un avión en esa zona:

(a) mediante los tres radares;

(b) mediante por lo menos un radar.

14. En la fabricación de un cierto aparato se utilizan dos piezas del mismo tipo. Para que el aparato funcione, se precisa que por lo menos una de las piezas no esté fallada. La probabilidad de que la pieza esté fallada es 0,05. Calcular, bajo el supuesto de independencia, la probabilidad de que el mencionado aparato funcione.

15. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ sucesos independientes dos a dos y equiprobables, cada uno de los cuales tiene probabilidad p. Supongamos que $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = 0$. Hallar el valor de p que hace que la probabilidad del suceso $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ sea máxima.