Práctico 2

Vectores

1. Se consideran los siguientes pares de vectores u y v:

$$u = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j},\ v = -6\mathbf{i} + 10\mathbf{j}; \qquad u = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j},\ v = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}; \qquad u = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j},\ v = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

Para cada uno de ellos se pide:

a) Indicar si u y v son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas.
b) Dibujar u y v.

2. Sean $u = (2, -1, -1)$, $v = (1, -2, 1)$.

a) Hallar $||u||$, $||v||$ y el ángulo entre u y v.
b) Hallar la proyección de v en la dirección de u.
c) Hallar un vector w que sea coplanar con u y v, y ortogonal a u.

3. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. Hallar $||v||$ sabiendo que $u - v$ es ortogonal a u, $||u|| = 3$ y el ángulo entre u y v es $\pi/4$.

4. Probar que para todo par de vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ valen

a) $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2u \cdot v$. *Sugerencia:* recordar $||w||^2 = w \cdot w$, para todo $w \in \mathbb{R}^3$.
b) $u \cdot v = \frac{1}{2}\left(||u + v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\right)$ *identidad de polarización.*
c) $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right)$ *ley del paralelogramo.* Interpretar geométricamente.

5. Sean u y v vectores tales que $||u|| = 2$, $||v|| = 3$ y $||u + v|| = \sqrt{19}$. Calcular $u \cdot v$ y el ángulo formado por u y v.

6. Hallar el ángulo que forman dos diagonales en un cubo.

7. Se considera el triángulo $T \subset \mathbb{R}^2$ de vértices $(19, -7)$, $(20, -6)$, $\left(19 - \sqrt{3}, -7 + \sqrt{3}\right)$.

a) Hallar las longitudes de los lados de T.
b) Hallar los ángulos de T.

8. Hallar dos versores que sean ortogonales simultáneamente a $u = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $v = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

9. Hallar el área del paralelogramo de vértices adyacentes $(1, -2, 3)$, $(2, 0, 1)$, $(0, 4, 0)$.

10. Probar que para todo par de vectores u, v, vale:

$$(u \cdot v)^2 + \|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2.$$

Sugerencia: usar las definiciones "físicas" de los productos escalar y vectorial.

11. El objetivo de este ejercicio es probar

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w, \qquad \forall\ u, v, w. \tag{1}$$

Asumimos que u, v y w no son nulos (en caso contrario, (1) vale trivialmente).

a) Probar que si v y w son colineales, entonces vale (1).
b) Supongamos que v y w son ortogonales.
   1) Probar[1] que existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $u \times (v \times w) = xv + yw$.
   2) Probar $(v \times w) \times v = \|v\|^2 w$.
   Sugerencia: notar que $(v \times w) \times v$ y w son colineales y tienen mismo sentido.
   3) Multiplicando escalarmente por v la igualdad $u \times (v \times w) = xv + yw$, obtener

$$x\|v\|^2 = \big(u \times (v \times w)\big) \cdot v = u \cdot \big((v \times w) \times v\big).$$

   Usando la parte anterior, concluir $x = u \cdot w$.
   4) Razonando en forma análoga, probar $y = -u \cdot v$.
c) Supongamos ahora que v y w son arbitrarios. Probar (1) escribiendo $v = v_1 + v_2$, con v_1 colineal con w y v_2 ortogonal a w.

[1] Esto vale siempre, no requiere que sean ortogonales.

12. Sean u, v, w tres vectores arbitrarios.

   a) Probar la *identidad de Jacobi*
   $$u \times (v \times w) + w \times (u \times v) + v \times (w \times u) = 0.$$
   Sugerencia: usar la fórmula (1).

   b) Deducir
   $$u \times (v \times w) = (u \times v) \times w + v \times (u \times w).$$
   Esto muestra que el producto vectorial <u>no es asociativo</u>.

13. Calcular el volumen del paralelepípedo generado por $u = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $v = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $w = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

14. Sabiendo que el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}ah$, siendo a el área de la base y h la altura, calcular el volumen de la pirámide de vértices $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, $(-1,0,-1)$, $(-1,-1,1)$.

15. *a*) Probar:
   $$v_1 \cdot (v_2 \times v_3) = v_2 \cdot (v_3 \times v_1), \qquad \forall\, v_1, v_2, v_3.$$
   Sugeerencia: recordar que vale $u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w$.

   b) Deducir que el producto mixto es invariante por permutaciones circulares de sus factores, es decir, que vale:
   $$v_1 \cdot (v_2 \times v_3) = v_3 \cdot (v_1 \times v_2) = v_2 \cdot (v_3 \times v_1), \qquad \forall\, v_1, v_2, v_3.$$

   c) Probar que si intercambiamos dos factores, entonces el producto mixto cambia de signo, es decir
   $$v_1 \cdot (v_3 \times v_2) = -v_1 \cdot (v_2 \times v_3); \quad v_2 \cdot (v_1 \times v_3) = -v_1 \cdot (v_2 \times v_3); \quad v_3 \cdot (v_2 \times v_1) = -v_1 \cdot (v_2 \times v_3), \qquad \forall\, v_1, v_2, v_3.$$

Ejercicios extra.

1. Para cada uno de los siguientes vectores
   $$v = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}; \quad v = \mathbf{i} - \mathbf{j}; \quad v = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}; \quad v = a\mathbf{i} + a\mathbf{j},\ a \neq 0.$$
   a) Hallar un versor con la misma dirección y sentido que v.

   b) Hallar un versor con la misma dirección y sentido opuesto al de v.

2. Hallar el ángulo formado por los vectores u y v en los casos siguientes.

   a) $u = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$, $v = \mathbf{i}$.

   b) $u = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$, $v = \left(1 - \sqrt{3}\right)\mathbf{i} + \left(1 + \sqrt{3}\right)\mathbf{j}$.

   c) $u = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $v = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

   d) $u = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ y $v = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$.

3. En los casos siguientes encontrar un vector v del plano que forme un ángulo[2] θ con el vector $\mathbf{i}$ y tenga el módulo dado.
   $$\|v\| = 3,\ \theta = \pi/6; \qquad \|v\| = 8,\ \theta = \pi/3; \qquad \|v\| = 1,\ \theta = 3\pi/4; \qquad \|v\| = 6,\ \theta = 4\pi/3.$$

4. Sean $u = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $v = \mathbf{i} + a\mathbf{j}$, siendo a un escalar arbitrario. En cada caso encontrar a para que:

   a) u y v sean ortogonales.

   b) u y v sean paralelos.

   c) El ángulo entre u y v sea $\pi/4$.

   d) El ángulo entre u y v sea $2\pi/3$.

5. En los casos siguientes hallar la proyección de v en la dirección de u.
   $$u = 3\mathbf{i},\ v = \mathbf{i} + \mathbf{j}; \quad u = -5\mathbf{j},\ v = \mathbf{i} + \mathbf{j}; \quad u = 2\mathbf{i} + \mathbf{j},\ v = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}; \quad u = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j},\ v = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

[2]Tomar θ en sentido positivo, es decir, antihorario.

Solución (de los ejercicios de cálculo)

1.
   a) En el primer caso son paralelos, en el segundo ortogonales y en el tercero ninguno de las dos opciones.
   b)
2.
   a) $||u|| = ||v|| = \sqrt{6}$ y el ángulo entre u y v es $\pi/3$.
   b) $\Pi_u(v) = (1, -1/2, -1/2)$.
   c) $w = (0, -3/2, 3/2)$.
3. $||v|| = 3\sqrt{2}$.
4.
5. El producto escalar es $u \cdot v = 3$ y el ángulo formado por u y v es $\pi/3$.
6. Si el ángulo que forman dos diagonales en un cubo es θ, entonces $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$ y por lo tanto $\theta \simeq 70,5°$.
7. Sean $P = (19, -7)$, $Q = (20, -6)$ y $R = \left(19 - \sqrt{3}, -7 + \sqrt{3}\right)$.
   a) $d(P, Q) = \sqrt{2}$, $d(P, R) = \sqrt{6}$ y $d(R, Q) = 2\sqrt{2}$.
   b) El ángulo entre $\overline{PQ}$ y $\overline{RQ}$ es $\pi/3$, entre $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ es $\pi/2$ y entre $\overline{PR}$ y $\overline{RQ}$ es $\pi/6$.
8. Los versores son $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - \mathbf{k})$.
9. El área es $5\sqrt{5}$.
10.
11.
12.
13. El volumen es 14.
14. El volumen es $1/3$.
15.