2- Estimaciones (ejemplo), leyes de escala y análisis dimensional.

Cuestiones que pretendemos responder hoy:

1. Ejemplo de aplicación de estimaciones (ej. 1.8).
2. Realmente podrían existir criaturas tan grandes como Godzilla o King Kong?
3. Es realmente una hormiga tan “fuerte” como creemos?
4. Leyes de escala isométrica: cuerpos semejantes, factor de escala y ley cuadrática cúbica.
5. ¿Cómo varía el peso de un cuerpo semejante al variar su longitud?
6. ¿Qué entendemos por fuerza relativa? ¿Cómo varía la misma al variar el factor de escala?
7. La leyes de escala aplicada a la división celular. Factor de viabilidad.
8. Magnitudes fundamentales de la Física.
9. Repaso de operaciones con potencias.
10. Análisis dimensional. Para qué sirve y sus limitaciones.
11. Ejemplos de aplicación.

Ejemplo: Ejercicio 1.8

Estime cuántos átomos hay en su cuerpo. *(Sugerencia: Con base en sus conocimientos de biología y química, ¿cuáles son los tipos de átomos más comunes en su cuerpo? ¿Qué masa tiene cada tipo? Encuentre la masa atómica de los os elementos para el cálculo*

Composición de elementos en % de masa del cuerpo humano y masa atómica de cada elemento en u (unidad de masa atómica), 1 u = $1{,}61\times10^{-27}$ kg

Elemento:	O	C	H	N	Ca	P	K	S	Na	Cl	Mg
masa atómica en u	15.999	12.011	1.00784	14.0057	40.078	30.9738	39.098	32.065	22.9898	35.453	24.305
% en masa	65	18.5	9.5	3.2	1.5	1	0.4	0.3	0.2	0.2	0.1
N° átomos	1.7715E+27	6.72E+26	4.1101E+27	9.96E+25	1.63E+25	1.41E+25	4.46E+24	4.08E+24	3.79E+24	2.46E+24	1.79E+24

El número de átomos de c/u de los elementos lo podemos calcular:

$$Nro.\,átomos = \quad masa\ persona \times \%\ masa\ del\ elemento/(u \times masa\ atómica)$$

Sumo los átomos de c/u de los elementos y obtengo:

***$6{,}70\times10^{27}$ átomos**~10^{28}* **átomos**

Serían: ***7×10^{27} átomos** ~10^{28}* **átomos**

Ejemplo: Ejercicio 1.8

Veamos algo más fácil… como lo haría Fermi

Puedo suponer que el ser humano está compuesto por 100% de agua (H_2O).

La masa de una molécula de agua vale:

18 g/mol = 18×10^{-3} kg/($6{,}022\times10^{23}$ moléculas/mol) = $2{,}99\times10^{-26}$ kg

Por tanto si la masa de la persona es de 70 kg, entonces el número de átomos será:

$$\frac{70\,kg}{2{,}99\times10^{-26}\,kg\,/molécula}\times\frac{3\ átomos}{molécula}=7{,}02\times10^{27}\ átomos$$

Serían: ***7×10^{27} átomos*** **$\sim10^{28}$ átomos**

Obtengo el mismo orden de magnitud: 10^{28} !!!

Se estima que el nro. de átomos en el universo observable oscila entre 10^{78} y 10^{82} .

El número de átomos de la Tierra es de 10^{50}

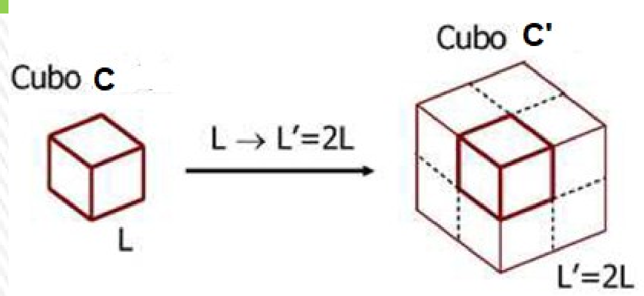
Leyes de Escala

¿Son posibles estas criaturas de este tamaño?

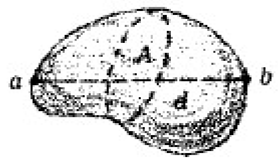
Parece que una hormiga es increíblemente fuerte respecto a su tamaño: puede cargar el peso de varias hormigas. Sin embargo, un elefante no podría cargar a otro elefante. Si hiciéramos una hormiga del tamaño de un elefante, ¿sería una súper-hormiga?

Leyes de escalas (escala isométrica)

Dos cubos: C con arista L y C’ con arista L’= 2L.
Superfices laterales: $S=6L^2$; $S'=6L'^2=6(2L)^2= 24L^2=4S$
Volúmenes: $V=L^3$; $V'=L'^3=(2L)^3= 8L^3=8V=2^3V$
El segundo cubo, es mayor que el primer cubo, con en un factor de 2.



Dos cuerpos son semejantes cuando la razón entre las dimensiones lineales que lo caracterizan es la misma, cualesquiera que sean éstas

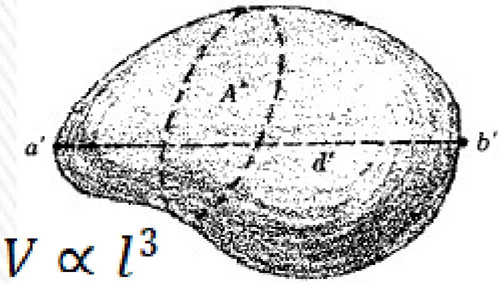


El **factor de escala (*k*)** es la razón de longitudes correspondientes en dos figuras semejantes (también se le llama **razón de semejanza**).

$$k = \frac{d'}{d}$$

Razón entre las áreas transversales *A* y *A’* vale: $\frac{A'}{A} = k^2$

Razón entre los volúmenes *V* y *V’* vale: $\frac{V'}{V} = k^3$



Si S es la superficie y V el volumen se cumple: $S \propto l^2$ $V \propto l^3$

Ley cuadrática-cúbica $S = KV^{\frac{2}{3}}$

para el cubo tenemos que K=6, y para la esfera K≅4,84

La importancia de estas relaciones se debe a que ciertas propiedades físicas dependen del volumen y otras dependen del área.

La masa y el peso son proporcionales al volumen.

Mientras que la fuerza de cualquier organismo depende del área de la sección transversal, es decir de la superficie.

EJEMPLO: Ejercicio 10

Una mujer de 1,55 m de altura pesa 50 kg. ¿Cuánto pesaría una mujer de 1,70 m y forma semejante?

Datos: L= 1,55 m; W= 50 kg; L'= 1,70 m

Modelamos a las mujeres como semejantes, entonces su factor de escala *k* vale:

$$k = \frac{L'}{L} = \frac{1{,}70}{1{,}55} = 1{,}09677$$

Por lo visto, el peso varía en función de k^3:

$$W' = k^3 W = (1{,}09677)^3(50) = 65{,}966$$

Expresando el resultado con dos cifras significativas: **W'= 66 kg**

Leyes de escalas-Fuerza relativa

Las relaciones o leyes de escala, muestran los **cambios funcionales y estructurales que tienen lugar como consecuencia de los cambios de tamaño (cambios de escala) en los organismos.**

Se ha comprobado que la fuerza de cualquier organismo depende solamente del área de la sección transversal de sus músculos.

Fuerza relativa de un animal: peso que puede levantar (o soportar) por la acción de sus músculos dividido por su propio peso.

Si $F_{máx}$ peso o fuerza máxima que puede realizar y W su propio peso:

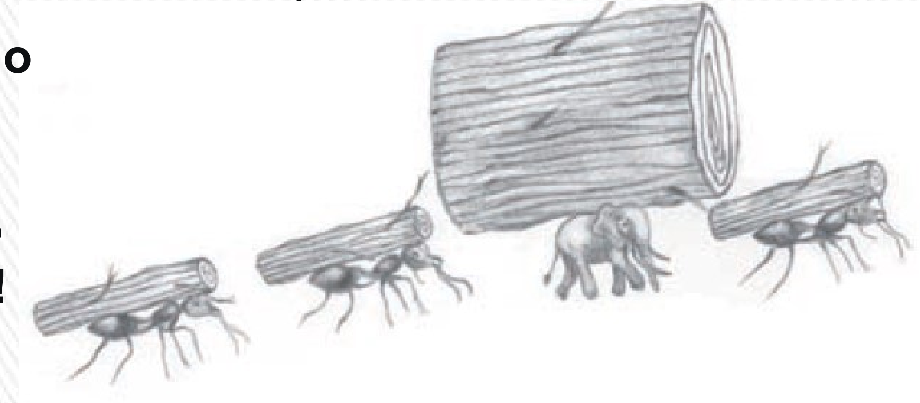
$$f = \frac{F_{máx}}{W}$$

La fuerza relativa de un ejemplar con un factor de escala *k* se reduce en un factor *1/k*.

$$f' = \frac{1}{k} f$$

Por lo tanto, una hormiga es intrínsacamente más débil que un hombre o un elefante.

Una hormiga gigante del tamaño humano no sería una criatura biológicamente viable: ya que sólo podría levantar un porcentaje pequeño de su peso, incluso no podría levantar ni siquiera sus patas!
O un elefante del tamaño de una hormiga podría levantar pesos mayores que ésta!..



Leyes de escalas

Lo dicho acerca de la fuerza de los músculos se aplica también a los huesos y cualquier otro material estructural.
Para un animal de forma dada, la resistencia de sus huesos con respecto a su propio peso depende de su tamaño, y cuanto mayor sea el animal, más pequeña es su fuerza relativa.

La forma de los animales grandes es muy diferente a la de animales pequeños

El ancho de las patas del elefante es mucho mayor que las del perro, y éste que el de la mosca.

El efecto de escala interviene en otras propiedades fisiológicas.
Las **velocidades a la que se extrae el oxígeno del aire, a la que los alimentos se digieren y absorben en el intestino, a la que se pierde calor en la superficie del cuerpo, son proporcionales a las áreas de los pulmones, intestinos y la piel respectivamente, por tanto a** k^2.
La **velocidades a la que se debe suministrar oxígeno o alimento , o a la que se produce calor es proporcional a la masa (por tanto al volumen) del animal, por tanto a** k^3.
Esto repercute en la rapidez carrera, altura en saltos, potencia desarrollada.

EJEMPLO: ejercicio 10 continuación

Una mujer de 1,55 m de altura pesa 50 kg. ¿Cuánto pesaría una mujer de 1,70 m y forma semejante?

Datos: L= 1,55 m; W= 50 kg; L'= 1,70 m

Modelamos a las mujeres como semejantes, entonces su factor de escala *k* vale:

$$k = \frac{L'}{L} = \frac{1{,}70}{1{,}55} = 1{,}09677$$

Por lo visto, el peso varía en función de k^3: $W' = k^3 W = (1{,}09677)^3 (50) = 65{,}966$

Expresando el resultado con dos cifras significativas: **W'= 66 kg**

Supongamos que la mujer de 1,55 m y 50 kg, puede levantar una masa de hasta 25 kg. ¿Cuánto podrá levantar una mujer semejante de 1,70 m?

La fuerza relativa de la mujer de 1,55 m vale: $f = \frac{F_{máx}}{W} = \frac{25}{50} = 0{,}50$

Mientras que la fuerza relativa de la mujer de 1,70 m vale: $f' = \frac{f}{k} = \frac{0{,}50}{1{,}09677} = 0{,}4559$

Por tanto podrá levantar una masa de hasta:

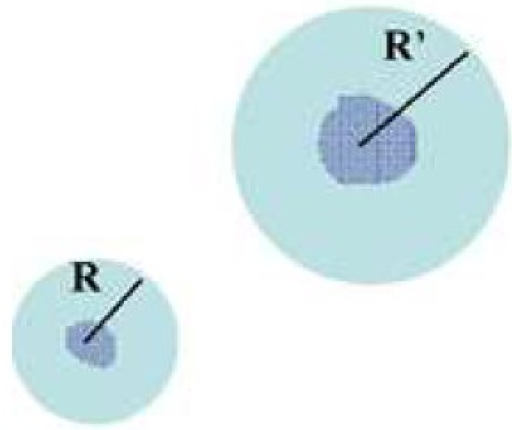
$$F'_{máx} = f'.W' = 0{,}4549 \times 65{,}966 = 30{,}0\, kg$$

Podrá levantar hasta una masa de 30 kg

Leyes de escalas –División celular

¿Por qué se dividen las células cuando alcanzan cierto tamaño?
Vamos a modelar a las células como esféricas.
El factor de escala de la célula más vieja (y más grande de radio R’) con respecto a la célula más joven (y menor de radio R) vale: $k = R'/R$

Volumen de célula vieja (V') es k^3 veces el volumen de célula más joven (V), por lo que tiene k^3 veces el material metabólico del de la más joven, por lo que requiere k^3 veces más oxígeno (y otras sustancias), que la más joven. Todo el oxígeno consumido por la célula debe pasar a través de la pared de la misma, por lo que la cantidad de oxígeno por unidad de tiempo requerida será proporcional al área de la pared celular.



Por lo tanto la célula más vieja puede obtener a lo sumo k^2 veces el oxígeno que obtiene la más joven por unidad de tiempo.
El **cociente entre la cantidad máxima de oxígeno que se puede obtener y el oxígeno necesario se llama factor de viabilidad (f_V).**
Para que la célula sobreviva $f_V > 1$.
De las relaciones anteriores se deduce que:

$$f_{V\ \text{célula vieja}} = \frac{1}{k} f_{V\ \text{célula joven}}$$

Leyes de escalas – División celular

$$f_{V\ \text{célula vieja}} = \frac{1}{k} f_{V\ \text{célula joven}}$$

Una célula joven tiene un factor de viabillidad f_V mayor que 1.
Cuando la célula crece, su f_V disminuye y se acerca a 1.
Para evitar la asfixia, la célula debe detener su crecimiento o dividirse.
Por medio de la división, la célula grande con un f_V pequeño es reemplazada por dos células más pequeñas, c/u con un f_V mayor.

Por ejemplo si una célula se divide en dos iguales, c/u de las nuevas células tendrá la mitad de la masa y por tanto la mitad de su volumen.
Por lo tanto, el factor de escala será:

$$k = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 1{,}26$$

Esto quiere decir que el factor de viabilidad de la célula original aumenta en este factor.
Si originalmente valía 1. entonces el factor de viabilidad de las nuevas células pasa a ser de 1,26.

Magnitudes fundamentales y unidades del Sistema Internacional (S.I.)

1. **Masa (M) - kilogramo (kg)**
2. **Longitud (L) - metro (m).**
3. **Tiempo (T) - segundo (s).**
4. Temperatura- kelvin (K).
5. Intensidad luminosa - candela (cd).
6. Cantidad de sustancia - mol.
7. Intensidad de corriente- amperio (A).

Repaso matemático: potencias

Todo **producto de factores iguales** se puede escribir en forma de **potencia**.
El factor que se repite se llama **base** y el número de veces que se repite se llama **exponente**: **$7\times7\times7\times7 = 7^4$** **$a\times a\times a = a^3$**

Exponente negativo: $7^{-4} = \frac{1}{7^4} = \frac{1}{7\times7\times7\times7}$ $a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a\times a\times a}$

Producto de potencias de igual base: $2^3\times2^4\times2=2^{3+4+1}=2^8$ $a^x \times a^y = a^{x+y}$

Cociente de potencias de igual base: $\frac{5^5}{5^2} = 5^{5-2} = 5^3$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

Producto de potencias de igual exponente: $3^3\times2^3\times5^3 = (3\times2\times5)^3 = 30^3$
$a^x \times b^x = (a\times b)^x$

Cociente de potencias de igual exponente: $\frac{6^3}{3^3} = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 2^3$ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Potencia de una potencia: $(5^3)^2 = 5^{3\times2} = 5^6$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Exponente fraccionario: $\sqrt{8} = 8^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = x^{\frac{m}{n}}$$

Análisis dimensional

Dimensión: naturaleza física de una cantidad o magnitud.

Si **mido una distancia** en **unidades de metros, pulgadas o codos**, se trata de la **magnitud distancia** y la **dimensión** es la **longitud**.

Símbolos dimensiones básicas mecánica: L longitud, M masa y T tiempo.
Se usan corchetes [ ] para indicar las dimensiones de una magnitud.
Ejemplos, velocidad (v): $[v] = L/T$; área (A): $[A] = L^2$.

Con frecuencia es necesario deducir una expresión matemática o una ecuación o bien verificar su validez, esto se puede hacer con el **análisis dimensional, que hace uso del hecho de que las dimensiones pueden ser tratadas como cantidades algebraicas.**
Estas cantidades, por ejemplo, se pueden sumar o restar sólo si tienen las mismas dimensiones.
Si los términos en los lados opuestos de una ecuación tienen las mismas dimensiones, entonces puede ser correcta, es una condición necesaria, pero no suficiente!
El análisis dimensional tiene valor como verificación parcial de una ecuación y también puede usarse para desarrollar una comprensión de las relaciones entre las magnitudes físicas en situaciones muy complejas.

Análisis dimensional

El **análisis dimensional** aprovecha el hecho de que *las dimensiones pueden tratarse como cantidades algebraicas*.

- **Las cantidades sólo pueden sumarse o restarse si tienen las mismas dimensiones (es decir son homogéneas).**
- **Los dos miembros de una igualdad (o ecuación) deben tener las mismas dimensiones.**
- **Los argumentos de funciones trascendentes (exponencial, logaritmos, funciones trigonométricas) deben ser adimensionados.**
- **La dimensión de cualquier magnitud física puede expresarse en función de las 7 dimensiones de las magnitudes fundamentales (en nuestro caso nos restringiremos a 3: M,L, T)**

Con el análisis dimensional puedo deducir o verificar una fórmula o expresión, determinar las unidades (o dimensiones) de la constante de proporcionalidad, pero no su valor numérico.

Por tanto no puedo determinar las constantes adimensionadas.

Ejemplo:

Análisis dimensional- a) La ley de Gravitación Universal de Newton establece que la fuerza de atracción entre dos cuerpos depende de sus masas y de la distancia que las separa:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

¿Qué dimensiones debe tener la constante *G para que la ecuación tenga sentido?*

A partir de la ley puedo deducir que: $G = \frac{F.r^2}{M.m}$

Dimensiones: $[M] = [m] = M$; $[r^2] = L^2$; $[F] = MLT^{-2}$.(pues F = m.a)

$[G] = [F] . [r^2] / ([M].[m])$

$[G] = (MLT^{-2}).(L^2)/((M)(M))$

$[G] = M^{(1-(1+1))}.L^{(1+2)}\,T^{-2} = M^{-1}L^3T^{-2}$

$[G] = L^3/(M.T^2)$

$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

Unidades:

$m^3/(kg.s^2)$ $=N.m^2/kg^2$

Ejercicio 1.14

Imagine que se encuentra Ud. en un examen de física y le parece recordar una ecuación para obtener la velocidad *v* con que una piedra llega al piso después de caer desde una altura *h*. La fórmula que recuerda es la siguiente: $v = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ donde g es la aceleración de la gravedad? La usaría usted en el examen o existen motivos para desconfiar de su memoria?

$$v = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Veamos las dimensiones de *h*, *v* y *g*:

$$[v] = \left[\sqrt{\frac{2h}{g}}\right] = \sqrt{\frac{2[h]}{[g]}}$$

$[h] = L$;

$[v] = L/T = L.T^{-1}$;

$[a] = L/T^2 = L.T^{-2}$;

$$LT^{-1} = \sqrt{\frac{L}{LT^{-2}}} = \sqrt{\frac{1}{T^{-2}}} = \sqrt{T^2} = T$$

La expresión no es dimensionalmente correcta, por tanto no puede estar bien!!!

Ejercicio 1.17

La relatividad general nos dice que entorno a un agujero negro existe un cascarón esférico del cual *nada* puede escapar – ni siquiera la luz. Este se conoce como **el horizonte de eventos**, y su radio, $\mathbf{r_s}$, depende de la masa **M** del agujero negro. Se sabe además que su valor también depende de las dos constantes físicas de gran relevancia para la relatividad general – la velocidad de la luz **c** y la constante de gravitación universal **G**.
Su expresión teórica viene dada por: . Mediante análisis dimensional, halle los valores de . Recuerde que G = 6,67×10^{-11} N.m^2/kg^2 y c = 3,00×10^8 m/s.

radio de Schwarzschild $r_s = 2G^x c^y M^z$

Veamos las dimensiones de r_S, G y c: $[r_s] = L$ $[M] = M$

$$[c] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

$$[G] = (MLT^{-2})(L^2)(M^{-2}) = M^{1-2}L^{1+2}T^{-2} = M^{-1}L^3T^{-2}$$

$$[r_s] = [2G^x c^y M^z] = [G^x c^y M^z] = [G^x][c^y][M^z] = [G]^x[c]^y[M]^z$$

$$L = (M^{-1}L^3T^{-2})^x(LT^{-1})^y M^z = M^{-x+z}L^{3x+y}T^{-2x-y}$$

Igualo los exponentes de c/u de las dimensiones de M, L y T.

Ejercicio 1.17

La relatividad general nos dice que entorno a un agujero negro existe un cascarón esférico del cual *nada* puede escapar – ni siquiera la luz. Este se conoce como **el horizonte de eventos**, y su radio, $\mathbf{r_s}$, depende de la masa **M** del agujero negro. Se sabe además que su valor también depende de las dos constantes físicas de gran relevancia para la relatividad general – la velocidad de la luz **c** y la constante de gravitación universal **G**.

Su expresión teórica viene dada por: . Mediante análisis dimensional, halle los valores de . Recuerde que $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N.m^2/kg^2 y $c = 3{,}00\times10^{8}$ m/s.

M: 0 = -x +z entonces: x = z

T: 0 = -2x – y entonces y = -2x

L: 1 = 3x + y = 3x -2x = x

Resulta; x = z = 1; y = -2

$$r_s = 2Gc^{-2}M = \frac{2GM}{c^2}$$

Radio de Schwarzschild (1916) u horizonte de eventos: medida del tamaño de un agujero negro de simetría esférica y estático.

Esta expresión se había calculado anteriormente, utilizando la mecánica newtoniana, como el radio de un cuerpo esféricamente simétrico en el que la velocidad de escape era igual a la velocidad de la luz.

Había sido identificado en el siglo XVIII por John Michell Y Pierre Simon Laplace.

Ninguna cosa dentro de él, incluyendo los fotones, puede escapar debido a la atracción de un campo gravitatorio extremadamente intenso.

Las partículas del exterior que *caen* dentro de esta región nunca vuelven a salir, ya que para hacerlo necesitarían una velocidad de escape superior a la de la luz y, hasta el momento, la teoría indica que nada puede superarla.

Ejemplo: 1er. Parcial 2022 1.A

Ondas superficiales en aguas profundas- Podemos utilizar el análisis dimensional para determinar la velocidad ***v*** de las ondas superficiales en aguas profundas. Las cantidades en el problema son la longitud de onda **λ**, la densidad ***ρ*** del fluido, y la aceleración de la gravedad ***g***, ya que las fuerzas son gravitatorias. La ecuación dimensional es: $v = C.\, \lambda^{\alpha}\, \rho^{\beta}\, g^{\gamma}$ siendo C, una constante adimensionada.

Se asume que la profundidad del agua es tan grande en comparación con la longitud de onda como para que no afecte su movimiento y que las fuerzas viscosas pueden ser ignoradas. ¿Cuáles son los valores de α, β y γ?

a) α=2, β=0 y γ=1/2 b) α=1/2, β=-1 y γ=1/2 c) α=0, β=1/2 y γ=2
d) α= -1/2, β=2 y γ=0 e) α=3/2, β=2 y γ=1 f) α=1/2, β=0 y γ=1/2

$[v]= L/T=L.T^{-1}$ $[\lambda]= L$ $[\rho]=M/L^3= ML^{-3}$ $[g]= L/T^2= LT^{-2}$

$[v]=[C.\, \lambda^{\alpha}\, \rho^{\beta}\, g^{\gamma}]= [\lambda^{\alpha}\, \rho^{\beta}\, g^{\gamma}]= [\lambda]^{\alpha}\, [\rho]^{\beta}\, [g]^{\gamma} =$ $(L)^{\alpha}\, (ML^{-3})^{\beta}\, (LT^{-2})^{\gamma} = L^{\alpha}\, M^{\beta}\, L^{-3\beta}\, L^{\gamma}\, T^{-2\gamma} = M^{\beta}\, L^{\alpha-3\beta+\gamma}\, T^{-2\gamma}$

Entonces: $L.T^{-1} = M^{\beta}\, L^{\alpha-3\beta+\gamma}\, T^{-2\gamma}$

M: $0 = \beta$ L: $1 = \alpha - 3\beta + \gamma$ T: $-1 = -2\gamma$

Por lo tanto $\beta = 0$; $\gamma = 1/2$ y: $1 = \alpha - 0 + 1/2$ de donde: $\alpha = 1/2$

α=1/2, β=0 y γ=1/2

$$v = C.\, \lambda^{1/2}\, \rho^{0}\, g^{1/2} = C\sqrt{\lambda.\, g}$$

Ejemplo: 1er. Parcial 2022 1.B

1.B- Considere las siguientes aseveraciones:

i) A mayor densidad mayor es la velocidad de la onda.

ii) Por el análisis anterior puede concluirse que en petróleo crudo (un material más viscoso y denso) las ondas son más lentas.

iii) Que una expresión sea dimensionalmente correcta es una condición necesaria pero no suficiente para que la misma sea cierta.

iv) De acuerdo con la ecuación obtenida, si la longitud de onda se duplica, la velocidad de la onda también se duplica.

Son verdaderas las siguientes:

a) Sólo la ii) b) Sólo la iii) c) ii) y iii) d) ii) y iv) e) i), iii) y iv) f) i) y ii)

$$v = C.\,\lambda^{1/2}\,\rho^{0}\,g^{1/2} = C\sqrt{\lambda.\,g}$$